ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

HERAUSGEGEBEN VON PROFESSOR R. VON MISES, BERLIN

Unter Mitwirkung von L. FÖPPL-München, G. HAMEL-Charlottenburg, Th. v. KÁRMÁN-Aachen, R. MOLLIER-Dresden, L. PRANDTL-Göttingen, H. REISSNER-Charlottenburg, R. RÜDENBERG-Berlin

:: Band 11 :: Seite 1 bis 80

:: Heft 1 :: Februar 1931

INHALT:



V·D·I-VERLAG G.M.B.H., BERLIN NW 7

Bezugsbedingungen und Anzeigenpreise auf der 3. Umschlagseite.

Z. f. ang. Mathem. u. Mech. / Berlin, Jan./Febr. 1931 / Bd. 11 / Heft 1, Seite 1—80.

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 11 | Februar 1931 | Heft 1

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Eigenspannungen und Eigenspannungsquellen.

Von *H. Reißner*, Berlin-Charlottenburg.

Als Eigenspannungen (auch Selbstspannungen) werden diejenigen Spannungen bezeichnet, die in einem Körper spannungsfreier Oberfläche und bei Abwesenheit von Volumkräften auftreten.

Ansätze und Voraussetzungen. Der Kirchhoffsche Satz von der Eindeutigkeit der Lösung der Elastizitätsgleichungen widerspricht dieser Möglichkeit nicht, weil er unter Voraussetzungen geführt ist, die das Bestehen von Eigenspannungen ausschließen.

Es tritt nämlich in diesem Beweise eine Transformation eines Raumintegrals in eine Summe eines Oberflächen- und eines Raumintegrals auf, und diese Transformation kann nur ausgeführt werden, wenn man voraussetzt, daß die Formänderungskomponenten sich linear aus den Ableitungen des Verschiebungsvektors bilden lassen.

Die Eigenspannungen entstehen nun gerade dann, wenn

1. entweder der Formänderungstensor sich nicht aus einem eindeutigen und stetigen Verschiebungsvektor ableiten läßt oder

2. die Verschiebungen so groß sind, daß diese Ableitung zwar möglich, aber nicht linear[1]) ist, in dem dann die genauern kinematischen Beziehungen:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}$$

usw. mit zykl. Vertauschung unerläßlich sind.

Nur Fall 1 soll im folgenden betrachtet werden. Über den Fall 2 möge hier nur beiläufig bemerkt werden[2]), daß er ein Kippen aus einer ungespannten in eine gespannte Lage bedeutet, wie z. B. das Umkippen einer schmalen Kegelschale.

Eigenspannungen der im Folgenden allein betrachteten Art sind also dann in einem Körper vorhanden, wenn der Formänderungstensor der Dehnungen und Gleitungen den Vereinbarkeits-(Kompatibilitäts-)bedingungen nicht genügt.

[1]) Auch im Falle des Knickvorganges bewirkt Fall 2 eine Mehrdeutigkeit.
[2]) Siehe das allgemeine Referat von Nemenyi über Eigenspannungen, dieses Heft, S. 58.

Die Entstehung von Eigenspannungen in einem Körper kann eine vorübergehende sein, wenn lokale Dichteänderungen durch Temperaturveränderungen zwar Wärme-(Eigen-)spannungen hervorrufen, jedoch nur in einem Betrage, der keine bleibende Formänderung mit sich bringt. Es können aber auch bleibende innere Spannungen in einem Körper erzeugt sein, z. B. wenn die Spannungen, welche zunächst durch Temperaturungleichheit entstanden sind, oberhalb der Elastizitätsgrenze liegen, oder wenn durch chemische Umsetzungen oder Umkristallisationen, wie sie der sogenannte Vergütungsprozeß des Stahles hervorruft, lokale Dichteänderungen auftreten, oder schließlich, wenn durch Belastungskräfte bleibende lokale Formänderungen zurückgelassen sind.

Während die vorübergehenden, unter der Elastizitätsgrenze bleibenden Temperaturspannungen, wie bekannt[3]), aus Dilatationen allein berechenbar sind, wird man in dem allgemeinen Fall bleibender, innerer Spannungen nicht mehr Dilatationen allein als Ursache ansetzen dürfen. Denn die bleibenden Formänderungen infolge zunächst entstehender übermäßiger Temperaturspannungen oder Belastungsspannungen werden zum geringsten Teil Dichteänderungen und zum großen Teil nicht kugelsymmetrische Dehnungen und Gleitungen sein.

Die Berechnung wird man allerdings auch in diesem allgemeineren Falle nur unter einer gewissen, allerdings sehr oft genügend genau erfüllten Voraussetzung durchführen können, nämlich:

I. *Daß der Körper nach der Verfestigung der bleibenden Formänderung wieder isotrop und homogen mit angebbaren Elastizitätskonstanten E, G und m geworden ist.*

Diese Voraussetzung ist so zu verstehen, wie bei jedem andern elastischen Spannungszustand, daß nämlich von der Anisotropie und Inhomogenität infolge der Spannung selbst abgesehen wird.

Mit dieser Voraussetzung wird man in den meisten technischen Anwendungen rechnen dürfen, man wird nur gewisse von Love hervorgehobene Fälle ausschließen müssen, wo das Material plastisch bleibt, ohne sich zu verfestigen oder nach der Verfestigung merklich inhomogen und anisotrop wird. Der erste Fall tritt bei relativ genügend hoher Temperatur z. B. auch bei Eis ein, der zweite Fall wird bei den ungeheuren Gravitationsspannungen im Erdinnern angenommen werden müssen.

Bezeichnungen. Es sollen bedeuten:

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ die Normalspannungen, abgekürzt σ, $\tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ die Tangentialspannungen, abgekürzt τ, eines Spannungszustandes insbesondere des Eigenspannungszustandes eines Körpers,

$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = s$,

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ die Dehnungskomponenten, $\gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$ die Gleitungskomponenten, abgekürzt ε, γ, eines von einem Verschiebungsvektor ableitbaren (kompatibeln) Formänderungszustandes,

${}^0\varepsilon_x\ {}^0\varepsilon_y\ {}^0\varepsilon_z, {}^0\gamma_{yz}, {}^0\gamma_{zx}, {}^0\gamma_{xy}$ die Komponenten einer bleibenden, die Eigenspannungen verursachenden Formänderung, die nicht von einem Verschiebungsvektor ableitbar ist, abgekürzt ${}^0\varepsilon, {}^0\gamma$,

$\Theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, \quad {}^0\Theta = {}^0\varepsilon_x + {}^0\varepsilon_y + {}^0\varepsilon_z$,

u, v, w ein Verschiebungsvektor,

E den Elastizitätsmodul, G den Schubmodul, $\frac{1}{m}$ das Querkontraktionsverhältnis (die Poissonsche Zahl) ${}^+\sigma, {}^+\tau$ der aus dem Formänderungszustand ε, γ auf Grund der Hookeschen Spannungs-Formänderungsbeziehungen abgeleitete „fingierte" Spannungszustand.

Unter der Voraussetzung (I) darf man die sechs Spannungs-Formänderungsbeziehungen des Hookeschen Gesetzes in der folgenden erweiterten Form schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= {}^0\varepsilon_x + \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \frac{1}{m}(\sigma_y + \sigma_z)\right] \\ \gamma_{yz} &= {}^0\gamma_{yz} + \frac{1}{G}\tau_{yz} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

mit zyklischer Vertauschung von x, y und z.

Die Formänderungskomponenten ε und γ bezeichnen dann die von einem spannungslosen Anfangszustande aus gerechnete Formänderung.

[3]) Siehe z. B. A. Föppl, Vorlesungen über Mechanik, Bd. V S. 293—308. — H. Lorenz, Elastizität, Oldenbourg, 1913, S. 583—591. — A. u. L. Föppl, Zwang und Drang, Oldenbourg, 1920, Bd. II S. 266—314. — H. Winkel, Festigkeitslehre, Springer, 1927, S. 482—494. — M. v. Laue, Zeitschrift für technische Physik, 1930, S. 385—394.

Die Umkehrung der Gl. (1) lautet: wenn man, wie üblich, mit $\Theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$ die Dilatation bezeichnet:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E\,m}{(m+1)(m-2)}(\Theta - {}^0\Theta) + \frac{E\,m}{m+1}(\varepsilon_x - {}^0\varepsilon_x) \\ \tau_{yz} &= G\,(\gamma_{yz} - {}^0\gamma_{yz}) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

mit zyklischer Vertauschung von x, y und z.

Es ist nun offenbar unter der anfangs gemachten Voraussetzung allgemein genug, zunächst von allen Volumkräften und Oberflächenkräften abzusehen, da sich deren Wirkung einfach superponiert, wenn nur die schließlichen Gesamtspannungen unter der Elastizitätsgrenze bleiben und die Formänderungen, die nach der obigen Fortsetzung von einer ideellen Anfangslage aus gerechnet werden, den Charakter kleiner Größen behalten.

Die Gleichgewichtsbedingungen lauten dann bekanntlich:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

usw. mit zyklischer Vertauschung von x, y und z.

Als zugehörige Grenzbedingung gilt die Bedingung verschwindender Oberflächenspannungen.

Wenn man nun die Gl. (2) in diese Gleichgewichtsbedingungen einsetzt, nehmen sie eine Form an, die die von einem zusammenhängenden Anfangszustand an eintretenden Formänderungskomponenten ε, γ als verursacht von den Anfangsformänderungen ${}^0\varepsilon$, ${}^0\gamma$ darstellt.

Es ergeben sich nämlich als Elastizitätsgleichungen:

$$\Delta u + \frac{m}{m-2}\frac{\partial \Theta}{\partial x} = \frac{2}{m-2}\frac{\partial\, {}^0\Theta}{\partial x} + 2\frac{\partial\, {}^0\varepsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial\, {}^0\gamma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\, {}^0\gamma_{xz}}{\partial z} \quad \ldots\ldots \quad (3a)$$

mit zyklischer Vertauschung von x, y und z.

Die Bedingung verschwindender Oberflächenspannungen ist ebenfalls nach den Gl. (2) zu formulieren.

Hier sind ${}^0\varepsilon_x$, ${}^0\gamma_{yz}$ usw. als voneinander ganz unabhängige Orts-, und wenn man will auch Zeitfunktionen, anzusehen, deren Werte zwar wegen der zugrunde gelegten Voraussetzung I gewisse absolute Größen nicht überschreiten dürfen, die aber sonst beliebig unstetig sein dürfen. Denn man kann, von einem spannungslosen Anfangszustand ausgehend, solange die Kontinuumauffassung zulässig ist, mit Hilfe chemischer, thermischer oder mechanischer Versuchsanordnungen einem beliebig kleinen Volumenelement unabhängig von den Nachbarelementen beliebige bleibende Formänderungen aufzwingen.

Diese Ansätze bedeuten offenbar folgendes:

II. *Ein Eigenspannungszustand kann immer aufgefaßt werden als verursacht durch das Zusammenwirken von bleibenden Anfangsdeformationen* ${}^0\varepsilon$, ${}^0\gamma$ *und elastischen Deformationen in einem zusammenhängenden, ursprünglich spannungslosen Körper.*

Es entstehen nun technisch-physikalisch zwei Arten von Aufgaben, nämlich:

a) Es sind die Anfangsformänderungen ${}^0\varepsilon$, ${}^0\gamma$ gegeben, und es werden die von ihnen verursachten Spannungen gesucht.

b) Es sind mit Hilfe des bekannten Aufschneidungsprozesses[4]) die Eigenspannungen durch die Formänderung der voneinander isolierten Volumelemente mit einer Genauigkeit bekannt, die mit der Kleinheit der Volumelemente zunimmt, und es wird nach der Verursachung der Eigenspannungen, d. h. nach den Anfangsformänderungen ${}^0\varepsilon$, ${}^0\gamma$, gefragt.

Wie weit man bei der zweiten Aufgabe mit der Zerkleinerung des betrachteten Körpers bei einer gewissen Genauigkeitsforderung zu gehen hat, und ob man sich dabei überhaupt einem System von Grenzfunktionen nähert, kann man im allgemeinen nicht sagen.

Nur eine gewisse ungefähre Kenntnis der Stetigkeit der Verursachung der Eigenspannungen kann einen Anhalt darüber geben.

Übrigens ist die Auflösung eines Körpers in unabhängige Volumenelemente durch Zerschneidung auch versuchstechnisch an diejenige Grenze gebunden, daß die für die Zerschneidung notwendigen Kräfte keine bleibenden Formänderungen hervorrufen dürfen, die das Ergebnis fälschen würden, ferner auch daran, daß es schwierig ist, vor der Zerschneidung genügend viele Meßmarken an der Oberfläche des Körpers anzubringen.

[4]) Siehe z. B. A. Föppl, loc. cit. — M. v. Laue, loc. cit.

Bestimmung der Eigenspannungen aus den Spannungsquellen. Für die Aufgabe a) sind die Gl. (3) maßgebend. Man kann ihnen noch eine etwas anschaulichere Form geben, wenn man gewisse „fingierte Spannungen" einführt, nämlich diejenigen Spannungen, welche der Formänderung ε, γ, d. h. den Verschiebungen u, v, w aus dem, bei hinweggedachten Anfangsformänderungen ${}^0\varepsilon$, ${}^0\gamma$ spannungslosen Anfangszustande entsprechen würde.

Bezeichnet man diese fingierten Spannungen mit ${}^+\sigma$ und ${}^+\tau$, so lassen sich die Gl. (3) offenbar wiederum als Gleichgewichtsbedingungen in der folgenden Form schreiben:

$$\frac{\partial\, {}^+\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\, {}^+\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\, {}^+\tau_{xz}}{\partial z} = \frac{E\,m}{m+1}\left[\frac{1}{m-2}\frac{\partial\, {}^0\Theta}{\partial x} + \frac{\partial\, {}^0\varepsilon_x}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial\, {}^0\gamma_{xy}}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial\, {}^0\gamma_{xz}}{\partial z}\right] \quad . \; . \; . \quad (4)$$

usw. mit zyklischer Vertauschung von x, y und z.

Da nun diese fingierten Spannungen ${}^+\sigma$ und ${}^+\tau$ mit den gesuchten Eigenspannungen σ und τ vermittelst der den aufgezwungenen Anfangsdeformationen oder Spannungsquellen ${}^0\varepsilon$ und ${}^0\gamma$ durch das Hookesche Gesetz entsprechenden Anfangsspannungen oder Quellspannungen ${}^0\sigma$ und ${}^0\tau$ verknüpft sind durch die Beziehung:

$$\text{III} \quad \sigma = {}^0\sigma - {}^+\sigma\,, \qquad \tau = {}^0\tau - {}^+\tau\,,$$

so sind mit den fingierten Spannungen auch die wirklichen sofort bekannt.

Man kann dann den folgenden anschaulichen Satz aussprechen:

Die fingierten Spannungen, welche zufolge Beziehungen II und III den Eigenspannungen zugeordnet sind, sind gleich den Spannungen, welche in einem von Anfangsdeformationen freien Körper auftreten würden, infolge der folgenden fingierten Volumkräfte:

$$X = -\frac{E\,m}{m+1}\left[\frac{1}{m-2}\frac{\partial\, {}^0\Theta}{\partial x} + \frac{\partial\, {}^0\varepsilon_x}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial\, {}^0\gamma_{xy}}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial\, {}^0\gamma_{xz}}{\partial z}\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (4a)$$

usw. mit zyklischer Vertauschung von x, y und z.

Mit Hilfe dieses Satzes kann man u. a. sofort die Frage beantworten, wann ein Eigenspannungszustand durch Dichtigkeitsänderungen allein erzeugt werden kann. Nämlich entsprechend einem in etwas anderer Form schon bekannten Resultat[5]):

Nur fingierte Spannungszustände, welche aus einer Kräftepotentialfunktion ableitbar sind, können durch reine Dichteänderungen (z. B. durch reine Temperaturänderung) erzeugt werden. Die Potentialfunktion der fingierten Volumkräfte ist dann die Dichteänderung ${}^0\Theta$ selbst bis auf den Faktor $Em/3(m-2)$.

Auf Grund der obigen Betrachtungen kann man auch einem von A. Föppl ausgesprochenen, Minimalprinzip den folgenden für die direkte Methode der Variationsrechnung geeigneten Inhalt geben.

Die in einem von Volumen- und Oberflächenkräften freien Körper bei gegebenen Anfangsdeformationen ${}^0\varepsilon$, ${}^0\gamma$ sich einstellenden Eigenspannungen machen die aus den $\varepsilon - {}^0\varepsilon$ und $\gamma - {}^0\gamma$ gebildete Formänderungsarbeit (6) (welche in diesem Falle, d. h. bei Abwesenheit äußerer Kräfte, mit der potentiellen Energie zusammenfällt) zum Minimum. Dabei sind die Deformationsgrößen ε und γ aus einem Verschiebungsvektorfeld ableitbar und definiert durch die Beziehungen (1).

Der Beweis folgt daraus, daß die Gleichgewichtsbedingungen (3) der Eigenspannungen σ und τ zu dem folgenden bekannten Ausdruck des Princ. d. virt. Verr. führen:

$$\int d\,V(\sigma_x\,\delta\,\varepsilon_x + \sigma_y\,\delta\,\varepsilon_y + \sigma_z\,\delta\,\varepsilon_z + \tau_{yz}\,\delta\,\gamma_{yz} + \tau_{zx}\,\delta\,\gamma_{zx} + \tau_{xy}\,\delta\,\gamma_{xy}) = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (5)$$

unter der Voraussetzung, daß die $\delta\,\varepsilon$ und $\delta\,\gamma$ in Übereinstimmung mit den Gl. (2) aus einem Verschiebungsvektor ableitbar sein müssen. Es stellt sich dann der Ausdruck (5) als Variation des folgenden Integrals der Formänderungsarbeit dar:

$$\int d\,V\left[(\varepsilon_x - {}^0\varepsilon_x)^2 + (\varepsilon_y - {}^0\varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_z - {}^0\varepsilon_z)^2 + \frac{(\Theta - {}^0\Theta)^2}{m-2} + \frac{1}{2}\left\{(\gamma_{yz} - {}^0\gamma_{yz})^2 + (\gamma_{zx} - {}^0\gamma_{zx})^2 + (\gamma_{xy} - {}^0\gamma_{xy})^2\right\}\right] \quad (6).$$

Einen bemerkenswerten Sonderfall von Eigenspannungen bilden die zuerst von Weingarten, dann von Timpe, Volterra und Cesaro behandelten, von Volterra Distorsionen genannten Spannungssysteme[6]).

[5]) Love, Elasticity, 1927, S. 108.

[6]) Siehe die zusammenfassende Darstellung bei Love, Elasticity, Cambridge 1927, p. 221—228.

Während sich nämlich im allgemeinen die Eigenspannungen nicht ohne Spannungsquellen ${}^0\varepsilon$, ${}^0\gamma$ aus dem Verschiebungsvektor u, v, w ableiten lassen, gibt es den scheinbaren Ausnahmefall, daß mit einem mehrwertigen Verschiebungsvektor in mehrfach zusammenhängenden Körpern Spannungen ohne äußere Kräfte möglich sind. Es zeigt dann bei jedem Umlauf, der nicht auf einen Punkt zusammengezogen werden kann, ohne aus dem Körper herauszutreten, der Verschiebungsvektor bei der Rückkehr zum Ausgangspunkt einen Sprung. Die physikalische Deutung ist die, daß an solchen, im übrigen beliebig gelegten Flächen, durch welche der Körper in einen einfach zusammenhängenden verwandelt wird, Zwangsschichten eingepreßt zu denken sind, welche die beiden Uferflächen voneinander abpressen und so die Verschiebung des ursprünglichen Körpers unstetig machen.

Weingarten hat den interessanten Satz aufgestellt und bewiesen, daß nur bei einer starren Verschiebung der beiden Uferflächen gegeneinander Deformationszustände, die sich aus einem Verschiebungsvektor ableiten, also den Kompatibilitätsbedingungen genügen, möglich sind. Der Spannungs- und Deformationszustand, jedoch nicht der Verschiebungszustand ist dabei stetig und einwertig, und die Orte der Zwangsflächen sind aus ihm nicht wieder auffindbar.

Im Lichte unserer Betrachtungsweise erscheint auch dieser Weingarten-Volterrasche Verschiebungszustand als einwertiger, und der Spannungszustand wird erzeugt durch eine Verteilung von Anfangsdeformationen ${}^0\varepsilon$, ${}^0\gamma$ in einem oder mehreren keilartigen Gebieten innerhalb des Körpers, die in der Weise unendlich dünn werden, daß die Dehnungen ${}^0\varepsilon$ in Richtung der dann gemeinsamen Flächennormale und die Gleitungen ${}^0\gamma$ senkrecht zur Flächennormale so unendlich werden, daß ${}^0\varepsilon_n\,dn$ und ${}^0\gamma_t\,dn$ endlich bleiben.

Der Weingartensche Satz zeigt, daß der spezielle Fall der Distorsionen nur dann eintritt, wenn die ${}^0\varepsilon_n$ und ${}^0\gamma_t$ eine Starrheitsverschiebung der Uferflächen erzwingen.

Berechnung der Spannungsquellen aus den Spannungen. Zur Beurteilung des Herstellungsprozesses eines Werkstückes kann es wichtig sein, die Verursachung der Eigenspannungen, den Tensor der Spannungsquellen ${}^0\varepsilon$ und ${}^0\gamma$ aus den durch allmähliche Zerschneidung des betrachteten Körpers ermittelten Eigenspannungen zu berechnen.

Obwohl diese oben mit b) bezeichnete Aufgabe nur eine Umkehrung der ersten Aufgabe bedeutet und man die sechs Gl. (1) des erweiterten Hookeschen Gesetzes und die drei Gl. (3) für die sechs unbekannten Spannungskomponenten ${}^0\varepsilon$, ${}^0\gamma$ und die drei Komponenten u, v, w des Verschiebungsvektors zur Verfügung hat, scheint die direkte Verwendung von (1) und (3) zur Auflösung nach den ${}^0\varepsilon$, ${}^0\gamma$ zu versagen.

Gangbar ist der Weg, durch die sogenannten Kompatibilitätsbedingungen Bestimmungsgleichungen für die Spannungsquellen zu gewinnen.

Denn es genügen zwar die Anfangsdeformationen oder Spannungsquellen ${}^0\varepsilon$, ${}^0\gamma$ nicht den Vereinbarkeitsbeziehungen, auch nicht die Spannungen σ, τ selbst, aber sowohl die Deformationskomponenten ε, γ vom ideellen Anfangszustand aus, als die zugehörigen, oben fingiert genannten Spannungen ${}^+\sigma$, ${}^+\tau$ müssen diesen sechs Vereinbarkeitsbeziehungen genügen.

Die Vereinbarkeitsbeziehungen lauten bekanntlich[7]):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x\,\partial y}=0\\ &2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y\,\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)=0 \end{aligned}\right\}\quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

usw. mit zyklischer Vertauschung in x, y und z.

Wenn man nun die Beziehungen (1) bzw. die ihnen gleichwertigen ${}^+\sigma=\sigma+{}^0\sigma$, ${}^+\tau=\tau+{}^0\tau$ in (7) einsetzt, so erhält man, wenn $\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z$ mit s, ${}^0\sigma_x+{}^0\sigma_y+{}^0\sigma_z$ mit ${}^0s$ bezeichnet wird:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2\,{}^0\sigma_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\,{}^0\sigma_y}{\partial x^2}-\frac{1}{m+1}\left(\frac{\partial^2\,{}^0s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\,{}^0s}{\partial y^2}\right)-2\frac{\partial^2\,{}^0\tau_{xy}}{\partial x\,\partial y}\\ &\qquad=-\left[\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2}-\frac{1}{m+1}\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}\right)-2\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x\,\partial y}\right]\\ &\frac{\partial^2\,{}^0\sigma_x}{\partial y\,\partial z}-\frac{1}{m+1}\frac{\partial^2\,{}^0s}{\partial y\,\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\,{}^0\tau_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\,{}^0\tau_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial\,{}^0\tau_{xy}}{\partial z}\right)\\ &\qquad=-\left[\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y\,\partial z}-\frac{1}{m+1}\frac{\partial^2 s}{\partial y\,\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z}\right)\right] \end{aligned}\right\}(8)$$

usw. mit zyklischer Vertauschung.

[7]) Siehe z. B. Handbuch der Physik (Geiger-Scheel), Springer 1929. Bd. VI Art. E. Trefftz, Math. Elastizitätstheorie, S. 64.

Hierin hängen die ${}^0\sigma$ und ${}^0\tau$ unmittelbar mit den ${}^0\varepsilon$ und ${}^0\gamma$ durch das Hookesche Gesetz linear zusammen und können, wenn man will, sofort durch letztere ausgedrückt werden. Es entstehen also auf diese Weise sechs voneinander unabhängige partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die sechs unbekannten Funktionen ${}^0\varepsilon$, ${}^0\gamma$, in denen die etwa durch Experiment gegebenen Eigenspannungen die Rolle von Störungsfunktionen spielen. Jedoch sind den Differentialgleichungen keine Oberflächenbedingungen zugeordnet.

Dieser scheinbare Mangel hängt mit der unten begründeten Willkür in der Auswahl aus der Mannigfaltigkeit der gleichwertigen Spannungsquellenzustände zusammen.

Die allgemeine Lösung dieser Gleichungen, die wegen der Willkür der Oberflächenbedingungen durchaus durchführbar ist, muß etwa wie folgt gewonnen werden:

Zunächst sieht man sofort, daß, wenn ${}^\sigma\varepsilon$, ${}^\sigma\gamma$ die nach dem Hookeschen Gesetz unmittelbar aus den Eigenspannungen folgenden Formänderungen sind, ein mögliches Spannungsquellensystem der ${}^0\varepsilon$ und ${}^0\gamma$ gegeben ist durch

$${}^0\varepsilon_x = {}^\sigma\varepsilon_x\,,\quad {}^0\gamma_{yz} = {}^\sigma\gamma_{yz} \text{ usw.},$$

d. h. man gelangt offenbar zu einem möglichen Anfangszustand, wenn man die den Eigenspannungen entsprechende Deformation rückgängig macht. Man hätte diese Lösung aber bei der Aufgabe des ersten Teiles dieser Arbeit, der Bestimmung der Spannungen aus gegebenen Spannungsquellen nicht ansetzen dürfen, denn man kann nicht erwarten, daß das physikalisch gegebene Quellensystem, welches nur eines von unendlich vielen gleichwertigen ist, gerade mit dem Deformationstensor der Eigenspannungen übereinstimmt.

Dem entspricht es auch, daß man der obigen Partikularlösung noch irgendeine Lösung des für die ${}^0\varepsilon$, ${}^0\gamma$ homogenen Differentialgleichungssystems (8) überlagern darf.

Z. B. für den allgemeinen Fall:

$${}^0\varepsilon_x = {}^\sigma\varepsilon_x + A_x\, e^{ax+by+cz}$$

$${}^0\gamma_{yz} = {}^\sigma\gamma_{yz} + \left(A_y \frac{c}{b} + A_z \frac{b}{c}\right) e^{ax+by+cz}$$

usw. mit zyklischer Vertauschung in x, y, z und a, b, c, wo die $A_x\ A_y\ A_z\ a\ b\ c$ beliebige reelle oder komplexe Konstanten sind.

Oder die überlagerte Lösung der homogenen Gleichungen kann ein in x, y und z beliebiger linearer Ausdruck oder ein Polynom mit gewissen Beziehungen zwischen den Koeffizienten sein.

Jedes dieser Quellensysteme erzeugt dieselben Eigenspannungen.

Ferner für den achsialsymmetrischen Fall in Polarkoordinaten:

Die Kompatibilitätsgleichungen reduzieren sich dann auf zwei von der Form:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{rz}}{\partial z\, \partial r} = 0 \\ &\frac{\partial \varepsilon_\varphi r}{\partial r} - \varepsilon_r = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9),$$

welche unmittelbar abgeleitet werden können aus der Betrachtung der folgenden bekannten Beziehungen:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}\,,\quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}\,,\quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}\,,\quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\,.$$

Eine Lösung der homogenen Gl. (9) ist z. B.

$$\varepsilon_\varphi = A\, r \cos a z$$

$$\varepsilon_r = 2\, A\, r \cos a z$$

$$\varepsilon_z = A \frac{r^3}{b} \cos a z$$

$$\gamma_{rz} = A\left(\frac{1}{a} - 2\, a\right) \frac{r^2}{2} \sin a z\,.$$

Diese Lösung (und jede andere der homogenen Gleichungen (9)) kann zu der Lösung

$${}^0\varepsilon = {}^\sigma\varepsilon\,,\quad {}^0\gamma = {}^\sigma\gamma$$

hinzutreten, ohne die Eigenspannungen zu ändern.

Die vorhergehende Betrachtung führt also zu dem folgenden Satze:

Eins der möglichen Spannungsquellensysteme für ein gegebenes Eigenspannungssystem ist dasjenige, welches auf Grund des Hookeschen Gesetzes dem Eigenspannungssystem zugeordnet ist. Zu diesem Quellensystem kann man noch, ohne an den Eigenspannungen etwas zu ändern, irgendeine Lösung der homogenen Kompatibilitätsgleichungen (7) des Deformationstensors hinzuaddieren.

Dagegen gibt es zu einem vorgeschriebenen System von Eigenspannungsquellen $^0\varepsilon$, $^0\gamma$ in einem freien Körper nur ein einziges System von Eigenspannungen, nämlich dasjenige, welches aus den Gleichgewichtsbedingungen (3) bzw. (3a) bei verschwindenden Oberflächenspannungen ermittelbar ist.

Auch die oben besprochenen Weingarten-Volterraschen Distorsionen können offenbar statt wie bei den genannten Verfassern aus flächenhaft verteilten Spannungsquellen aus räumlich stetig verteilten Quellen erzeugt werden, wenn man die den Eigenspannungen zugeordneten Deformationen als Quellen wählt. Beide Möglichkeiten müssen Lösungen der Gl. (7), (8) oder (9) sein.

Man kann auch die zu überlagernde Lösung der Verträglichkeitsbedingungen (7), welche das eine Quellensystem in das andere überführt, sofort angeben. Es ist nämlich derjenige kompatible Formänderungszustand, welcher sich aus dem negativ genommenen Weingartenschen Quellenkeil und den obigen räumlich verteilten Quellen zusammensetzt.

Besonders einfach ist offenbar die Übertragung der obigen Überlegungen auf das Fachwerk. Denn in einem n-fach statisch unbestimmten Fachwerk läßt sich auf unendlich viele Weise je nach der Wahl der als überzählig bezeichneten Glieder dasselbe Eigenspannungssystem in bekannter Weise durch falsche (inkompatible) Ablängung erzeugen, und diese Erzeugungsweise kann man noch weiter variieren durch Überlagerung von Ablängungsfehlern sämtlicher Stäbe, welche für sich allein keine Eigenspannungen erzeugen würden. Auch hier hat also die Frage nach der Verursachung eines Eigenspannungssystems eine vieldeutige Antwort.

Weitere Fragestellungen:

1. Durch das Vorhergehende ist festgestellt worden, daß man zu einem gegebenen z. B. durch Aufschneiden ermittelten Eigenspannungsfeld immer unendlich viele zugeordnete Eigenspannungsquellenfelder aufweisen kann. Es fragt sich nun, ob und in welcher Weise man eine ausgezeichnete Darstellung finden bzw. Invarianten des Quellenfeldes angeben kann.

Es ist sofort einzusehen, daß es sowohl die Sonderfälle des reinen Dilatations- als auch des reinen Gestaltänderungsfeldes gibt, die grundsätzlich verschieden und nicht ineinander überführbar sind. Als Beispiele dafür mögen die folgenden angeführt werden:

Ein reines Dilatationsquellenfeld ist das Feld einer Temperaturänderung oder einer durch Vergütung bewirkten Dichteänderung, bei dem die Elastizitätsgrenze der entstehenden Eigenspannungen nicht überschritten wird.

Ein reines Gestaltänderungsquellenfeld ist das durch bleibende Torsion der äußeren Schichten eines tordierten Stabes erzeugte Feld oder noch einfacher auch das Feld, welches entsteht, wenn man zwei dünnwandige Rohre gegeneinander tordiert und an den Enden miteinander verbindet.

Es ist nun zuweilen technisch-physikalisch wichtig zu wissen, ob ein ermittelter Eigenspannungszustand durch ein reines Dilatationsquellenfeld oder durch ein reines Gestaltänderungsquellenfeld oder durch ein wesentlich gemischtes Feld verursacht ist.

Das unmittelbar aus der Anwendung des Hookeschen Gesetzes sich ergebende Quellenfeld wird im allgemeinen anscheinend gemischt sein, und es wäre wichtig, ein Kriterium dafür zu haben, wann ein gegebenes Quellenfeld auf ein reines Dilatationsfeld und wann auf ein reines Gestaltänderungsfeld zurückgeführt werden kann.

Die Frage kann also wie folgt formuliert werden:

Wann ist es bei einem irgendwie ermittelten Spannungsquellenfelde $^0\varepsilon$, $^0\gamma$ möglich, es durch eine Überlagerung einer selbstspannungsfreien Deformation [nach den Gl. (7)] entweder in ein reines Dilatationsfeld $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z$ oder in ein reines Gestaltänderungs- (dilatationsfreies) Feld $\Sigma\varepsilon = 0$ zu überführen?

2. Es liegt sehr oft ein großes Interesse vor, einen Eigenspannungszustand durch Nachglühen auf kleinere Spannungswerte zu bringen. Der Vorgang besteht dann darin, den Körper längere Zeit und sehr allmählich steigend und wieder abnehmend einer gleichmäßigen Temperaturerhöhung auszusetzen, die einerseits nicht so groß ist, daß sie die Form und die Kristallstruktur des Körpers ändert, aber andererseits die Plastizitätsgrenze zeitweilig so herabsetzt, daß die maximale Schubspannung überall auf den der Ausglühtemperatur entsprechenden Wert heruntergeht.

Die zugehörige Frage lautet also:

In welchen Eigenspannungszustand geht ein gegebener Eigenspannungszustand über, wenn die Plastizitätsgrenze um ein bestimmtes Maß herabgesetzt wird?

Die Antwort wird jedenfalls davon abhängen, ob man als Plastizitätsgrenze nach Mohr die größte Hauptspannungsdifferenz oder nach v. Mises den quadratischen Mittelwert der drei Hauptspannungsdifferenzen einführt.

Die Aufgabe läßt sich unschwer lösen für manche kugelsymmetrische und für manche ebene achsialsymmetrische Spannungszustände, ohne auf den Verschiebungszustand einzugehen, der von dem ursprünglichen zu dem gesuchten Zustand führt.

Es wäre aber vom technischen Standpunkt aus wünschenswert, auch für den allgemeinen Fall die Lösung anzugeben.

3. Die Nichterfüllung der Verträglichkeitsbedingungen für ein Formänderungsfeld ist zuweilen gedeutet worden als eine Formänderung in einem Körperraum mit nichteuklidischem Linienelement[8]), so zwar, daß an Stelle des Linienelements:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

ein Riemannsches auf ersteres nicht transformierbares Linienelement

$$ds^2 = g_{11}\,dx^2 + g_{22}\,dy^2 + g_{33}\,dz^2 + 2\,g_{12}\,dx\,dy + 2\,g_{23}\,dy\,dz + 2\,g_{31}\,dz\,dx$$

tritt.

Die Deformationskomponenten ε und γ können aus den Variationen δds und δdx, δdy, δdz in der bei krummlinigen, schiefwinkligen Koordinaten üblichen Weise durch Ableitungen dieser Variationen nach den Koordinaten ausgedrückt werden und brauchen, wenn das Linienelement nichteuklidisch ist, nicht mehr die Verträglichkeitsbedingungen im euklidischen Raume zu erfüllen. Im Gegenteil müssen die dann nicht verschwindenden rechten Seiten der Gl. (7) dazu benutzt werden, um den Verschiebungsvektor δx, δy, δz und gewisse Beziehungen zwischen den Koeffizienten g_{ik} des Linienelements zu bestimmen.

Die Nichterfüllung kann dann, wie eine nähere Betrachtung zeigt, gedeutet werden als Krümmung des geometrischen Feldes. Eine Veranschaulichung dieser Deutung ist freilich im Raume nicht möglich, dagegen in manchen Fällen von flächenhaften Formänderungsfeldern etwa wie folgt:

Die Deformationskomponenten einer ebenen Membran mit Selbstspannungen sind solche, daß die Verträglichkeitsbedingungen in der Ebene nicht erfüllt sind, jedoch wird man die Flächenelemente in gewissen Fällen spannungslos aneinandersetzen können, wenn man sie in eine geeignet gekrümmte Fläche verlegt oder der Membran erlaubt, sich aus der Ebene heraus zu wölben.

Es ist allerdings bisher nicht gezeigt worden, wie die Auffindung der zugeordneten Koeffizienten g_{ik} des nichteuklidischen Linienelements, also die Angabe der Raumkrümmung, die physikalische Aufgabe fördern kann. 114

Achsensymmetrische Torsionszustände und ihre Inversion.

Von *A. Timpe* in Berlin.

Es besteht eine gewisse Analogie zwischen dem Elastizitätsproblem in der Ebene und dem der achsensymmetrischen Torsion von Drehkörpern. In beiden Fällen gelingt eine wesentliche Auflockerung des Problems durch Einführung von Spannungsfunktionen, als deren Ableitungen die Komponenten des Spannungszustandes erscheinen. Im Falle des ebenen Problems hat das Anwendungsfeld der Airyschen Spannungsfunktion, die durch die Abhandlungen von F. Klein, K. Wieghardt und A. Timpe in die deutsche Literatur eingeführt wurde, schon eine sehr gründliche Bearbeitung erfahren. Im Falle des Torsionsproblems, wo wir die grundlegenden Formulierungen A. Föppl[1]) verdanken, ist mathematischer Apparat und Anwendungsbereich, über den Stand der bis jetzt vorliegenden Untersuchungen[2]) hinaus, noch der Ausgestaltung fähig, wobei die Analogie zum ebenen Problem mancherlei Fingerzeige gibt. Im vorliegenden Aufsatz wird das in einer früheren Arbeit[3]) für das Torsionsproblem entwickelte System erzeugender Funktionen mit ihren Differentialgleichungen in räumliche Polarkoordinaten übersetzt und gezeigt, daß Torsionszustände ähnlich wie ebene Spannungsbilder sich invertieren lassen, und zwar auf zwei verschiedene Weisen (Spannungs- und Verschiebungstyp in den Randbedingungen). Nach Untersuchung der Torsion des Kegels, der auch auf dem Mantel Spannungen aufzunehmen hat, wird der Inversionsprozeß am Beispiel der Kugel illustriert, die in den Polen durch zwei entgegengesetzte tordierende Momente beansprucht wird.

[8]) Siehe Trefftz (loc. cit. Anm. [7])).

[1]) Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der bayr. Ak. 35 (1905), S. 249 und S. 504.

[2]) Vgl. den zusammenfassenden Bericht von Th. Pöschl in dieser Zeitschrift 2 (1922), S. 137.

[3]) A. Timpe, Math. Ann. 71 (1911), S. 480.

1. Die Grundgleichungen in Polarkoordinaten. Bei Anwendung von Polarkoordinaten ϱ, χ, ϑ haben wir bei fehlender Massenkraft für den Fall, daß alle Spannungen und Verschiebungen von der Meridiankoordinate ϑ unabhängig sind, als einzige den Torsionsfall charakterisierende Gleichgewichtsbedingung[4]):

$$\frac{\partial \tau_\varrho}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \tau_\chi}{\partial \chi} + \frac{1}{\varrho}(3\,\tau_\varrho + 2\,\tau_\chi \operatorname{cotg}\chi) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Hierin bedeuten τ_ϱ, τ_χ die Komponenten der Gleitspannung, die im Meridianschnitt in der Richtung der wachsenden ϱ- bzw. χ-Werte wirken. Für das Oberflächenelement des Umdrehungskörpers mit der nach außen gerichteten Normalen ν ergibt sich als Drehspannung:

$$t_\vartheta = \tau_\varrho \cos(\varrho, \nu) + \tau_\chi \cos(\chi, \nu) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2).$$

Mit der linearen Drehverschiebung $\mathfrak{v}$ sind die Rotationskomponenten $2\,\tilde{\omega}_\varrho$, $2\,\tilde{\omega}_\chi$ durch die Formeln[5]):

$$2\,\tilde{\omega}_\varrho = \frac{1}{\varrho^2 \sin\chi}\frac{\partial}{\partial \chi}(\mathfrak{v}\,\varrho \sin\chi), \qquad 2\,\tilde{\omega}_\chi = -\frac{1}{\varrho \sin\chi}\frac{\partial}{\partial \varrho}(\mathfrak{v}\,\varrho \sin\chi) \quad \ldots \quad (3),$$

die Spannungskomponenten durch die Formeln[5]):

$$\tau_\varrho = G\,\varrho \sin\chi \frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\frac{\mathfrak{v}}{\varrho \sin\chi}\right), \qquad \tau_\chi = G \sin\chi \frac{\partial}{\partial \chi}\left(\frac{\mathfrak{v}}{\varrho \sin\chi}\right) \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

(G Gleitmodul) verknüpft. Damit geht die Gleichgewichtsbedingung (1) über in

$$\frac{\partial(2\,\tilde{\omega}_\varrho)}{\partial \chi} - \frac{\partial(2\,\tilde{\omega}_\chi\,\varrho)}{\partial \varrho} = 0\,, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1'),$$

wird also durch den Ansatz befriedigt: $2\,\tilde{\omega}_\varrho = \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}$; $2\,\tilde{\omega}_\chi\,\varrho = \frac{\partial \varphi}{\partial \chi}$. Für die erzeugende Funktion φ erhalten wir mittels (3) die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}\right) + \frac{1}{\sin\chi}\frac{\partial}{\partial \chi}\left(\sin\chi \frac{\partial \varphi}{\partial \chi}\right) = 0\,, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5),$$

d. h. die Potentialgleichung. Setzen wir andererseits $\mathfrak{v}\,\varrho \sin\chi = \psi$, so ergibt sich reziprok:

$$\varrho^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varrho^2} + \sin\chi \frac{\partial}{\partial \chi}\left(\frac{1}{\sin\chi}\frac{\partial \psi}{\partial \chi}\right) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5').$$

Die Funktionen φ und ψ, die durch die Beziehungen $\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} = \frac{1}{\varrho^2 \sin\chi}\frac{\partial \psi}{\partial \chi}$; $\frac{\partial \varphi}{\partial \chi} = -\frac{1}{\sin\chi}\frac{\partial \psi}{\partial \varrho}$ assoziiert sind, können demgemäß als Potential- und Strömungsfunktion der achsensymmetrischen Strömung einer idealen Flüssigkeit gedeutet werden. Da $\mathfrak{v} = \frac{\psi}{\varrho \sin\chi}$, so passen die Gleichungen (5), (5') für das Integrationsproblem in dem Falle, wo die Verschiebungen auf dem Mantel des Umdrehungskörpers vorgeschrieben sind, in erster Linie bei Kugel- und Kegelaufgaben.

Eine zweite Schreibweise für (1), nämlich:

$$\frac{\partial(\varrho^3 \sin^2\chi \cdot \tau_\varrho)}{\partial \varrho} + \frac{\partial(\varrho^2 \sin^2\chi \cdot \tau_\chi)}{\partial \chi} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1''),$$

führt auf den Ansatz:

$$\tau_\varrho = \frac{1}{\varrho^3 \sin^2\chi}\frac{\partial u}{\partial \chi}; \quad \tau_\chi = -\frac{1}{\varrho^2 \sin^2\chi}\frac{\partial u}{\partial \varrho} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6).$$

Schreiben wir andererseits $\frac{\mathfrak{v}}{\varrho \sin\chi} = v$, so ist nach (4):

$$\tau_\varrho = G\,\varrho \sin\chi \frac{\partial v}{\partial \varrho}\,; \quad \tau_\chi = G \sin\chi \frac{\partial v}{\partial \chi}.$$

Die durch (6) und (4') assoziierten Funktionen u und v genügen daher den Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\frac{1}{\varrho^2 \sin^3\chi}\frac{\partial u}{\partial \varrho}\right) + \frac{\partial}{\partial \chi}\left(\frac{1}{\varrho^4 \sin^3\chi}\frac{\partial u}{\partial \chi}\right) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7),$$

$$\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho^4 \sin^3\chi \frac{\partial v}{\partial \varrho}\right) + \frac{\partial}{\partial \chi}\left(\varrho^2 \sin^3\chi \frac{\partial v}{\partial \chi}\right) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7').$$

[4]) Love, Elastizität, S. 108.
[5]) Love, Elastizität, S. 67.

Die Gl. (7), (7'), die bei Benutzung der isometrischen Koordinaten lg ϱ, χ eine noch etwas mehr symmetrische Form annehmen, passen für das Integrationsproblem in dem Fall, wo die tordierenden Spannungen t_ϑ auf dem Mantel (einschl. etwaiger Endquerschnitte) vorgeschrieben sind. Das ganze Gleichungssystem (5), (5'), (7), (7') ergibt sich auch aus dem in Zylinderkoordinaten für die erzeugenden Funktionen φ, ψ, u, v geltenden Formelsystem durch Einführung von Polarkoordinaten[6]); die hier gegebene direkte Herleitung zeigt aber unmittelbar, wie sie untereinander und mit den Verschiebungen $\mathfrak{v}$ zusammenhängen.

Auf Grund dieser Zusammenhänge ist klar, daß die Linien $u = \text{const}$ im Meridianschnitt die für den achsensymmetrischen Torsionszustand charakteristischen Spannungslinien bedeuten, d. h. daß dort an jeder Stelle die resultierende Gleitspannung in ihre Richtung fällt ($d\varrho : \varrho\, d\chi = \tau_\varrho : \tau_\chi$), während die auf die Rotationsfläche $u = \text{const}$ wirkenden Drehspannungen t_ϑ durchweg verschwinden. Ferner, daß der Unterschied der Kennziffern zweier Spannungslinien übereinstimmt mit dem durch 2π dividierten, über irgendeine Trajektorie bzw. deren Umdrehungsfläche resultierenden Torsionsmoment ($t_\vartheta = \dfrac{1}{\varrho^2 \sin^2\chi} \dfrac{\partial u}{\partial s}$, wo s die längs der Trajektorie gemessene Bogenlänge).

Zwei assoziierte Potential- und Strömungsfunktionen φ und ψ kann man aus einer achsensymmetrischen Potentialfunktion φ_1 herleiten durch den Ansatz:

$$\varphi = -\frac{\partial(\varrho\varphi_1)}{\partial\varrho}; \quad \psi = \varrho \sin\chi \frac{\partial\varphi_1}{\partial\chi} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8).$$

Geht man mit dem Ansatz für ψ in die Differentialgleichung (5') hinein, so erscheint sie in der Tat als eine Folge der für φ_1 hingeschriebenen Gl. (5). Entsprechendes gilt beim Ansatz für φ, und auch die Assoziationsbedingungen werden von φ und ψ befriedigt. Ähnlich überzeugt man sich, daß durch den Ansatz $u = \varrho \sin^3\chi \dfrac{\partial}{\partial\chi}\left(\dfrac{\psi}{\sin^2\chi}\right)$ die Differentialgleichungen (5') und (7) sich ineinander transformieren und daß auch $\psi = \dfrac{\partial(\varrho\Psi)}{\partial\varrho}$ der Gl. (5') genügt, wenn dies für Ψ zutrifft. Unter Berücksichtigung der für u und v geltenden Assoziationsbedingungen gelangt man so zu folgendem aus einer einzigen Funktion Ψ abgeleiteten Schema erzeugender Funktionen:

$$\psi = \frac{\partial(\varrho\Psi)}{\partial\varrho}; \quad u = -G\varrho\sin^3\chi\frac{\partial}{\partial\chi}\left(\frac{\Psi}{\sin^2\chi}\right); \quad v = \frac{1}{\varrho^2\sin^2\chi}\frac{\partial(\varrho\Psi)}{\partial\varrho} \quad \ldots \quad (9).$$

Hierin kann man die Strömungsfunktion Ψ gemäß (8) aus einer Potentialfunktion φ_1 herleiten.

2. Inversion von Torsionszuständen. Es ist bekannt, daß man durch die Substitution $\varphi_1' = \varrho\,\varphi_1$ aus einer der Laplaceschen Gl. (5) genügenden Funktion φ_1 eine neue Funktion φ_1' erhält, die wiederum der Potentialgleichung genügt, wenn man gleichzeitig die Punkte des Raums durch reziproke Radien abbildet: $\varrho' = \dfrac{1}{\varrho}$; $\chi' = \chi$; $\vartheta' = \vartheta$. Einer Strömungsfunktion $\Psi = \varrho\sin\chi\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\chi}$ ordnet sich bei diesem Prozeß die Funktion $\Psi' = \varrho'\sin\chi\dfrac{\partial(\varrho\varphi_1)}{\partial\chi} = \sin\chi\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\chi} = \dfrac{\Psi}{\varrho} = \varrho'\Psi$ zu, die im invertierten Raum, also rücksichtlich der Koordinaten ϱ', χ, ϑ wieder die Bedeutung einer Strömungsfunktion hat. Das Schema der für den Torsionszustand typischen erzeugenden Funktionen lautet daher im invertierten Raum:

$$\psi' = -\varrho^2\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\frac{\Psi}{\varrho^2}\right); \quad u' = -\frac{G}{\varrho^2}\sin^3\chi\frac{\partial}{\partial\chi}\left(\frac{\Psi}{\sin^2\chi}\right) = \frac{u}{\varrho^3}; \quad v' = -\frac{\varrho^4}{\sin^2\chi}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\frac{\Psi}{\varrho^2}\right) = -\varrho^3 v + \frac{3\varrho\Psi}{\sin^2\chi} \quad (9').$$

Als zugehörige Spannungskomponenten ergeben sich:

$$\tau_\varrho' = \frac{1}{\varrho'^3\sin^2\chi}\frac{\partial u'}{\partial\chi} = \frac{1}{\sin^2\chi}\frac{\partial u}{\partial\chi} = \varrho^3\tau_\varrho; \quad \tau_\chi' = -\frac{1}{\varrho'^2\sin^2\chi}\frac{\partial u'}{\partial\varrho'} = \frac{\varrho^4}{\sin^2\chi}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\frac{u}{\varrho^3}\right) = -\varrho^3\tau_\chi - \frac{3u}{\sin\chi} \quad (10).$$

Damit erhalten wir den

Satz: Bei der Inversion (erster Art) eines achsensymmetrischen Torsionszustandes geht ein spannungsfreier Rand $u = 0$ wieder in einen spannungsfreien Rand $u' = 0$ über. Um die Gleitspannung $\tau'\,dF'$ zu erhalten, die an einem dem Flächenelement dF des Meridianschnitts korrespondierenden Flächenelement $dF' = \dfrac{dF}{\varrho^4}$ angreift, läßt man $\dfrac{1}{\varrho}$

[6]) Vgl. A. Timpe, a. a. O., S. 486 ff., wo allgemein der Übergang zu krummlinigen isometrischen Koordinaten entwickelt wird.

der an dF angreifenden Gleitspannung $\tau\, dF$ in der ihrer Aktionslinie an der Stelle dF' korrespondierenden Richtung mit umgekehrtem Pfeilsinn wirken und überlagert eine zum Radius senkrechte Komponente, die der Kennziffer u der durch dF gehenden Spannungslinie proportional ist.

Beim ebenen Problem gehen bekanntlich sämtliche Spannungstrajektorien durch den Inversionsprozeß wieder in Spannungstrajektorien über[7]). Aber auch dort gibt es in den Spannungskomponenten ein Zusatzglied, das wie hier durch den Wert des für den Originalpunkt charakteristischen resultierenden Moments bestimmt wird. — Beim Torsionsproblem ist die Achse selbst stets Spannungslinie $u = \text{const}$, wenn sie singularitätenfrei ist, d. h. wenn nicht in ihr selbst tordierende Momente auf den Drehkörper übertragen werden. Bei der Inversion geht sie wieder in die Achse über, aber längs derselben ist jetzt $u' = \frac{\text{const}}{\varrho^3} = \text{const} \cdot \varrho'^3$, d. h. der singuläre Fall liegt vor. Bei den Anwendungen wird es darauf ankommen, durch Überlagerung einer partikulären Lösung sich von dieser Singularität freizumachen.

Während das bisher besprochene erste Inversionsverfahren dem Fall angepaßt ist, wo die tordierenden Kräfte auf dem Mantel und etwaigen Endquerschnitten des Umdrehungskörpers vorgeschrieben sind, benutzen wir in dem seltener vorkommenden Fall, daß die Verschiebungen auf der Oberfläche gegeben sind, folgenden Inversionsprozeß zweiter Art: Wir gehen aus von dem Schema erzeugender Funktionen:

$$\psi = \varrho \sin\chi \frac{\partial \varphi_1}{\partial \chi}; \qquad v = \frac{\psi}{\varrho^2 \sin^2\chi}; \qquad \mathfrak{v} = \frac{\psi}{\varrho \sin\chi} \quad \ldots \ldots \quad (11).$$

Substituieren wir $\varphi_1' = \varrho\, \varphi_1$, so wird

$$\psi' = \varrho' \sin\chi \frac{\partial(\varrho\, \varphi_1)}{\partial \chi} = \sin\chi \frac{\partial \varphi_1}{\partial \chi} = \frac{\psi}{\varrho}; \quad v' = \frac{\psi'}{\varrho'^2 \sin^2\chi} = \frac{\varrho\, \psi}{\sin^2\chi} = \varrho^3 v; \quad \mathfrak{v}' = \frac{\psi}{\sin\chi} = \varrho\, \mathfrak{v} \quad . \quad . \quad (11').$$

Den Spannungskomponenten des ursprünglichen Körpers

$$\tau_\varrho = G\, \varrho \sin\chi \frac{\partial v}{\partial \varrho}; \qquad \tau_\chi = G \sin\chi \frac{\partial v}{\partial \chi}$$

stehen als Spannungskomponenten im invertierten Körper gegenüber:

$$\tau_\varrho' = G\, \varrho' \sin\chi \frac{\partial v'}{\partial \varrho'} = -\varrho^3 \tau_\varrho - 3\, \varrho^3 \sin\chi \cdot v; \qquad \tau_\chi' = G \sin\chi \frac{\partial v'}{\partial \chi} = \varrho^3 \tau_\chi .$$

Charakteristisch für das zweite Inversionsverfahren ist, daß beim Übergang zum invertierten Körper sämtliche Verschiebungen den ϱ-fachen Betrag annehmen.

3. Kegelaufgaben. Da die Kugelfunktionen $\varrho^n P_n(\chi)$ und $\varrho^{-n-1} P_n(\chi)$ (unter n eine positive ganze Zahl verstanden) Lösungen der Laplaceschen Differentialgleichung darstellen, so erhält man in Übereinstimmung mit (9) und (6) folgende Lösungen des Problems der achsensymmetrischen Torsion[8]).

$$\left.\begin{aligned}
\varphi &= (a_n \varrho^n + b_n \varrho^{-n-1}) P_n; \qquad \psi = \left(-\frac{a_n}{n+1} \varrho^{n+1} + \frac{b_n}{n} \varrho^{-n}\right) \frac{\partial P_n}{\partial \chi} \sin\chi;\\
u &= -G \left(\frac{n}{n+2} a_n \varrho^{n+2} + \frac{n+1}{n-1} b_n \varrho^{-n+1}\right) \left(P_n \sin\chi + \frac{2}{n(n+1)} \frac{\partial P_n}{\partial \chi} \cos\chi\right) \sin\chi;\\
\tau_\varrho &= -G \left(\frac{n-1}{n+1} a_n \varrho^{n-1} + \frac{n+2}{n} b_n \varrho^{-n-2}\right) \frac{\partial P_n}{\partial \chi};\\
\tau_\chi &= -G \left(\frac{a_n}{n+1} \varrho^{n-1} - \frac{b_n}{n} \varrho^{-n-2}\right) \sin\chi \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\frac{1}{\sin\chi} \frac{\partial P_n}{\partial \chi}\right)
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (12).$$

Da die Lösungen $n < 2$ ausfallen, so erscheinen unter den u-Ausdrücken an erster Stelle (für $n = 2$) die Funktionen $\frac{a_2}{4} G \varrho^4 \sin^4\chi$ und $\frac{3}{2} b_2 G \frac{\sin^4\chi}{\varrho}$, deren Kombination von W. Arndt[9]) zur Bestimmung der Spannungen in der Umgebung eines kugelförmigen Hohlraums herangezogen wurde und von denen die erstere der bekannten Saint-Venantschen Lösung für die gleichförmige Torsion des Zylinders entspricht. Sie gehen durch Inversion (erster Art)

[7]) J. H. Michell, Prac. Lond. M. Soc. 34 (1901—02), S. 251. Vgl. A. Timpe, Zeitschr. Math. Phys. 52 (1905), S. 353.
[8]) Vgl. A. Timpe, Math. Ann. 71 (1911), S. 488, wo $90 - \chi$ statt des hier eingeführten Winkels χ benutzt ist.
[9]) Die Torsion von Wellen mit achsensymmetrischen Bohrungen und Hohlräumen, Diss. Göttingen 1916.

ineinander über. Die u-Funktionen, die in ϱ vom nullten Grade sind, sind $u = \text{const}$ (spannungsloser Zustand) und die von A. Föppl[10]) angegebene Lösung

$$u = a_0\, G\, (3\cos\chi - \cos^3\chi)\,; \qquad \tau_\varrho = -3\, a_0\, G\, \frac{\sin\chi}{\varrho^3}\,; \qquad \tau_\chi = 0\,, \quad \ldots \ldots \quad (13),$$

bei der alle Kegelmäntel $\chi = \text{const}$ spannungsfrei bleiben (Gegenstück zum strahligen Spannungszustand beim ebenen Problem; Hauptlösung für den Kegelstab). Aus ihnen ergeben sich durch Inversion zwei Lösungen, bei denen u mit ϱ^3 proportional ist, nämlich die Lösung

$$u = c_0\, G\, \varrho^3\,; \qquad \tau_\varrho = 0\,; \qquad \tau_\chi = -\frac{3\, c_0\, G}{\sin^2\chi} \quad \ldots \ldots \quad (14),$$

bei der in der ganzen Erstreckung der Achse tordierende Momente auf den Drehkörper übertragen werden, und die Lösung

$$u = d_0\, G\, \varrho^3\, (3\cos\chi - \cos^3\chi)\,; \qquad \tau_\varrho = -3\, d_0\, G \sin\chi\,; \qquad \tau_\chi = -3\, d_0\, G\, \frac{\cos\chi\,(3 - \cos^2\chi)}{\sin^2\chi} \quad (14'),$$

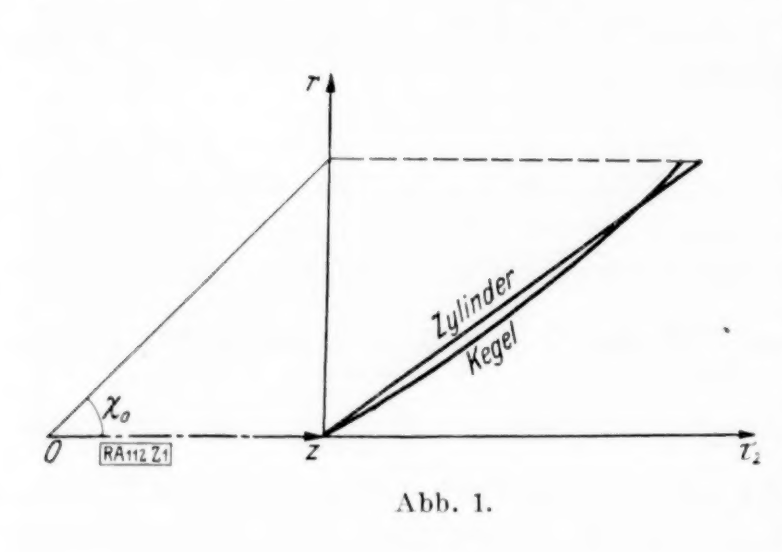


Abb. 1.

bei der längs der Achse eine entsprechende Singularität auftritt. Durch Kombination von (14) und (14′) erhält man die Spannungen in einem Hohlkegelstab, der auf seinen beiden Mänteln $\chi = \chi_1$ und $\chi = \chi_2$ vorgeschriebene gleichförmige Drehspannungen aufzunehmen hat. Die auf seine Grundflächen $\varrho = \varrho_1$ und $\varrho = \varrho_2$ wirkenden Torsionsmomente können dabei durch Überlagerung einer passenden Hauptlösung (13) im Rahmen des Saint-Venantschen Prinzips gewünschten Bedingungen angepaßt werden; z. B. kann man stets eine der beiden Grundflächen spannungsfrei machen. — Die für die Achse $\chi = 0$ singularitätenfreie Kombination von (14) und (14′):

$$u = d_0\, G\, \varrho^3\, (3\cos\chi - \cos^3\chi - 2)\,; \qquad \tau_\varrho = -3\, d_0\, G \sin\chi\,; \qquad \tau_\chi = 3\, d_0\, G \left(\frac{1}{\cos^2\frac{\chi}{2}} - \cos\chi \right) \quad (14'')$$

entspricht einem Vollkegelstabe, der auf seiner Mantelfläche $\chi = \chi_0$ eine gleichmäßig verteilte Drehspannung aufzunehmen hat. Um einen Vergleich mit der Saint-Venantschen Lösung für die gleichförmige Torsion des Zylinders mit spannungsfreiem Mantel zu erhalten, schneiden wir (Abb. 1) den Kegel mit einer Ebene senkrecht zu seiner Achse, der z-Achse, und berechnen die auf sie wirkenden Drehspannungen: $\tau_z = -6\, d_0\, G \operatorname{tg}\frac{\chi}{2}$. Für den Zylinder gleicher Grundfläche, der im Querschnitt das gleiche Torsionsmoment zu übertragen hat, ergeben sich nach dem linearen Spannungsgesetz von Saint-Venant Drehspannungen $\tau_z{}^0$, und man findet: $\tau_z : \tau_z{}^0 = \frac{3}{2}\, \frac{\operatorname{tg}\frac{\chi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\chi_0}{2}}\, \frac{1 + \cos\chi_0}{2 + \cos\chi_0} : \frac{\operatorname{tg}\chi}{\operatorname{tg}\chi_0}$. Nehmen wir etwa beim Zylinder die Drehspannungen am Umfang gleich 1, so ist die Umfangsspannung $\overline{\tau_z}$ beim Kegel:

Öffnungswinkel χ_0	15 °	30 °	45 °	60 °	75 °
Umfangsspannung $\overline{\tau_z}$	0,9942	0,9766	0,9459	0,9000	0,8359

Die maximale Gleitspannung beim Kegel ist also durchweg kleiner als beim Zylinder mit spannungsfreiem Mantel, und gegen die übliche Beurteilung der Beanspruchung nach dem linearen Spannungsgesetz von B. de Saint-Venant ist daher nichts einzuwenden. Die Abweichungen, die zwischen der wirklichen Verteilung der Gleitspannungen über den Querschnitt eines Kegels vom Öffnungswinkel $\chi_0 = 45°$ einerseits und dem für den Zylinder gültigen linearen Spannungsgesetz bestehen, sind aus Abb. 1 ersichtlich.

Durch das Formelsystem (12) in Verbindung mit der Hauptlösung (13) und die eben besprochene Lösungskombination (14″) beherrschen wir das allgemeine Problem des

[10]) A. a. O.

Kegelstabs, der auf seinem Mantel achsensymmetrische Drehspannungen aufzunehmen hat, die sich in eine nach wachsenden Potenzen von ϱ fortschreitende Potenzreihe entwickeln lassen. Mit Rücksicht auf das Hohlkugelproblem und vor allem auf die beim allgemeinen Inversionsprozeß benötigten partikulären Lösungen notieren wir aber weiter: Die u-Funktionen, die in ϱ vom ersten Grade sind, lauten:

$$u = a_1 G \varrho \cos\chi; \quad \tau_\varrho = -\frac{a_1 G}{\varrho^2 \sin\chi}; \quad \tau_\chi = -\frac{a_1 G \cos\chi}{\varrho^2 \sin^2\chi} \quad \ldots \quad (15)$$

und

$$u = b_1 G \varrho (1+\cos^2\chi); \quad \tau_\varrho = -\frac{2 b_1 G}{\varrho^2}\operatorname{cotg}\chi; \quad \tau_\chi = -\frac{b_1 G}{\varrho^2}\frac{1+\cos^2\chi}{\sin^2\chi} \quad \ldots \quad (15').$$

Sie gehen durch Inversion über in Lösungen, bei denen u mit ϱ^2 proportional ist, nämlich:

$$u = c_1 G \varrho^2 \cos\chi; \quad \tau_\varrho = -\frac{c_1 G}{\varrho \sin\chi}; \quad \tau_\chi = -\frac{2 c_1 G \cos\chi}{\varrho \sin^2\chi} \quad \ldots \quad (16)$$

und

$$u = d_1 G \varrho^2 (1+\cos^2\chi); \quad \tau_\varrho = -\frac{2 d_1 G}{\varrho}\operatorname{cotg}\chi; \quad \tau_\chi = -\frac{2 d_1 G}{\varrho}\frac{1+\cos^2\chi}{\sin^2\chi} \quad \ldots \quad (16').$$

Durch die Kombinationen $a_1 = -2 b_1$ und $c_1 = -2 d_1$ kann die Achse $\chi = 0$ singularitätenfrei gemacht werden.

Für Hohlkegelaufgaben sind noch die längs der Achse singulär sich verhaltenden Kugelfunktionen zweiter Art, $\varrho^n Q_n(\chi)$ und $\varrho^{-n-1} Q_n(\chi)$, heranzuziehen. Beispielsweise finden wir mit $n = 2$ nach den zu (12) analogen Formeln:

$$\tau_\varrho = -\frac{a_2'}{3}\varrho\left(\frac{3}{2}\sin\chi - \frac{3}{2}\sin\chi\cos\chi \lg\frac{1+\cos\chi}{1-\cos\chi} - \frac{1}{2}\frac{3\cos^2\chi - 1}{\sin\chi}\right),$$

$$\tau_\chi = a_2' \varrho\left(-\frac{1}{2}\sin^2\chi \lg\frac{1+\cos\chi}{1-\cos\chi} - \cos\chi\left[1 + \frac{2}{3\sin^2\chi}\right]\right).$$

Auf einem Kegelmantel ist also die Drehspannung linear in ϱ, gerade so wie bei der für $n = 2$ aus (12) hervorgehenden Lösung, so daß man durch Kombination beider Lösungen die Spannungen in einem Hohlkegel erhalten kann, bei dem die auf die beiden Mäntel wirkenden Drehspannungen beliebige lineare Funktionen von ϱ sind usw.

In der Praxis hat man oft mit der Torsion von Drehkörpern zu tun, bei denen die Umrißlinie im Meridianschnitt von den in der Literatur bisher explizite behandelten Formen erheblich abweicht[11]). Nun erhalten wir, ausgehend von den Grundlösungen (16) $u = z\varrho$ bzw. (15') $u = \varrho + \frac{z^2}{\varrho}$, folgende für den Übergang zu den rechtwinkligen Koordinaten z, r des Meridianschnittes bequeme Darstellung der in (12) hingeschriebenen u-Funktionen:

$$u = \varrho^{2n+1}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\varrho + \frac{z^2}{\varrho}\right) \text{ und } u = \frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\varrho + \frac{z^2}{\varrho}\right) \quad \ldots \quad (17).$$

Erstere liefert die Spannungsliniensysteme der früher vom Verfasser[3]) behandelten Polynomlösungen des Torsionsproblems, und man kann daher zu Näherungslösungen für Fälle gelangen, wo die Umrißkurve durch Polynomausdrücke in r und z approximiert werden kann.

4. Die Kugel, tordiert durch zwei entgegengesetzte Momente in den Polen. Die Verbindungslinie der beiden Pole O und Q (Abb. 2), in denen die entgegengesetzten Torsionsmomente 2π wirken, ist die z-Achse. Auf ihr ist $u = 1$, wenn wir für die im übrigen spannungsfreie Kugeloberfläche $u = 0$ festsetzen. Sei $OQ = 1$. Wir invertieren mittels $\varrho' = \frac{1}{\varrho}$ unsere Kugel von O aus an der Einheitskugel, wodurch sie in den Halbraum übergeht, der von der zur z-Achse senkrechten, durch Q gehenden Ebene begrenzt wird. Für letztere ist die durch Inversion erster Art aus u hervorgehende erzeugende Funktion $u' = 0$; allgemein $u' = \frac{u}{\varrho^3} = u\varrho'^3$, also auf der z-Achse $u' = \varrho'^3$. Führen wir in der Meridianebene in Q Polarkoordinaten l, Θ ein, so gilt auf der z-Achse für u' die Randbedingung: $\bar{u}' = 1 + 3l + 3l^2 + l^3$. Da u' auf der Vertikalen durch Q den konstanten Wert 0 hat, so springt u' in Q um den Betrag 1, d. h. der Halbraum hat hier das Torsionsmoment 2π aufzunehmen. Dem entspricht die Hauptlösung für den

[11]) Bezüglich der Spannungen in zylindrischen Stäben mit plötzlichen Querschnittsübergängen, Einkerbungen usw. vgl. A. Föppl, a. a. O.; F. A. Willers, Zeitschr. Math. Phys. 55 (1907), S. 225; L. Föppl, Sitzungsberichte d. math. phys. Klasse d. bayr. Ak. 51 (1921).

Drehkegel $\frac{1}{2}(3\cos\Theta - \cos^3\Theta)$. Um den Gliedern von $\bar{u}'$, die 1. bis 3. Grades in l sind, Rechnung zu tragen, haben wir die Lösungen (14) bis (16) heranzuziehen und erhalten als die allen Bedingungen des Halbraumproblems genügende erzeugende Funktion:

$$u' = 3\cos\Theta\left(\frac{1}{2} + l + l^2 + \frac{1}{2}l^3\right) - \frac{1}{2}\cos^3\Theta\,(1 + l^3) \qquad (18').$$

Für das Kugelproblem ergibt sich daher:

$$u = \frac{3\cos\Theta\left(\frac{1}{2} + l + l^2 + \frac{1}{2}l^3\right) - \frac{1}{2}\cos^3\Theta\,(1 + l^3)}{(1 + 2l\cos\Theta + l^2)^{3/2}} \qquad (18).$$

Die Spannungslinien $u = \text{const}$ im Meridianschnitt stimmen nicht überein mit den Linien $\Theta = \text{const}$, d. h. den durch die Grundpunkte O und Q gehenden Kreisen[12]). Um sie festzulegen, tasten wir die u-Werte auf der Linie $l = 1$, d. h. der Mittelsenkrechten von OQ, ab, ebenso diejenigen auf der Linie $l = \frac{1}{2}$, d. h. dem Kreis, der die von $z = \frac{2}{3}$ und $z = 2$ begrenzte Strecke der z-Achse zum Durchmesser hat. Folgende Zahlenwerte für u wurden errechnet.

Θ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	80°	85°	90°
$l = 1$	1	0,99945	0,99098	0,95270	0,84198	0,57876	0,43311	0,24447	0
$l = \frac{1}{2}$	1	0,99933	0,98913	0,94430	0,82003	0,54464	0,40077	0,22166	0

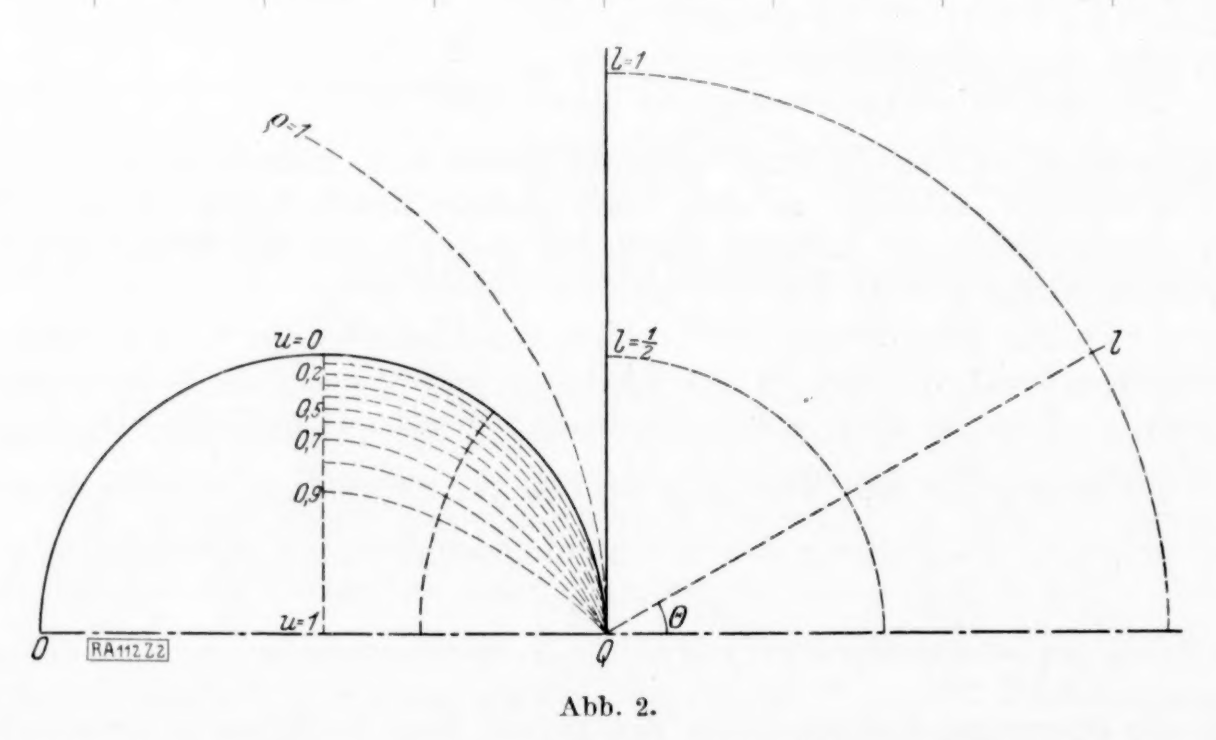


Abb. 2.

Der daraus durch Interpolation gewonnene Verlauf der Spannungslinien ist in Abb. 2 dargestellt. Nähert man sich von der Mittellinie $l = 1$ aus einem der Pole, so drängen sich die Spannungslinien nach der Achse zu stärker zusammen als die Büschelkreise $\Theta = \text{const}$. Um einen genaueren Einblick in die Verteilung der Spannungen über einen Querschnitt zu erhalten, berechnen wir die auf die Mittelebene $z = \frac{1}{2}$, d. h. $l = 1$ wirkenden Drehspannungen: $\tau_z = -12\sin\frac{\Theta}{2}\left(5 - 5\sin^2\frac{\Theta}{2} + 2\sin^4\frac{\Theta}{2}\right)$. Wir erhalten, wenn wir noch den Achsenabstand im Querschnitt $r = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\Theta}{2}$ einführen:

Θ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	80°	85°	90°
r	0	0,0658	0,1340	0,2071	0,2887	0,3837	0,4196	0,4582	0,5
$\frac{\tau_z}{12}$	0	0,6416	1,2097	1,6497	1,9375	2,0830	2,1055	2,1186	2,1213

[12]) Wenn man die Gleichung (7) in dipolare Koordinaten übersetzt, erkennt man, daß es keine Lösungen gibt, bei denen die Gesamtheit der Kreise $\Theta = \text{const}$ oder der zu ihnen orthogonalen Kreise die Spannungslinien darstellt.

Für den Zylinder, der bei spannungsfreiem Mantel eine gleichförmige Torsion erfährt und im Querschnitt das gleiche Torsionsmoment überträgt, haben wir nach dem linearen Spannungsgesetz die Drehspannungen $\tau_z{}^0 = 32 \operatorname{tg} \frac{\Theta}{2}$, am Umfang $\frac{\tau_z{}^0}{12} = 2{,}6667$. Die in Abb. 3 dargestellten beiden Verteilungsgesetze zeigen, daß im Vergleich zum Zylinder bei der Kugel die Umfangspartien bezüglich der Aufnahme des Torsionsmoments durch die Umgebung der Achse entlastet erscheinen, ähnlich wie dies bei unserm Kegelproblem der Fall war.

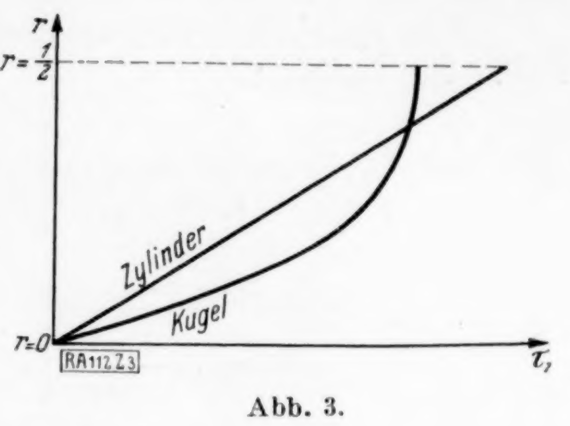


Abb. 3.

Der spindelförmige Körper, der durch Rotation eines Kreisbogens über der Sehne $OQ = 1$ entsteht, geht durch Inversion in einen Kegel vom Öffnungswinkel Θ_0 über. Handelt es sich wieder um die Torsion durch zwei in den Grenzpunkten O und Q wirkende entgegengesetzte Momente 2π, so können wir mit Hilfe der Formeln (13) bis (16') als erzeugende Funktion für das auf den Kegel invertierte Problem ansetzen:

$$u' = (1 + l^3) \frac{3\cos\Theta - \cos^3\Theta - (3\cos\Theta_0 - \cos^3\Theta_0)}{2 - 3\cos\Theta_0 + \cos^3\Theta_0}$$

$$+ 3(l + l^2) \frac{\cos\Theta(1 + \cos^2\Theta_0) - \cos\Theta_0(1 + \cos^2\Theta)}{(1 - \cos\Theta_0)^2}.$$

Eine ähnliche Untersuchung über das Inversionsverfahren bei der torsionslosen achsensymmetrischen Deformation von Drehkörpern ist in Aussicht genommen. Von Interesse dürfte auch die Übertragung auf Strömungsprobleme sein. 112

Fließversuche an Rohren aus Stahl bei kombinierter Zug- und Torsionsbeanspruchung.

Von *K. Hohenemser*.

(Mitteilung aus dem Institut für angewandte Mechanik der Universität Göttingen.)

Um die elastischen Formänderungen in der St. Venant-Misesschen Plastizitätstheorie zu berücksichtigen, verwendet A. Reuß[1]) einen Ansatz, bei welchem die Grundgleichungen der Plastizitätstheorie nach R. v. Mises[2]) zu den nach der Zeit differenzierten elastischen Grundgleichungen addiert werden. Ein anderer Weg, die elastischen Verschiebungen während des Fließens zu berücksichtigen, ist von A. Haar und Th. v. Kármán[3]) sowie von H. Hencky[4]) eingeschlagen worden. In dem Haar-Kármánschen Ansatz wird das Spannungsvariationsprinzip der Elastizitätslehre (Castiglianosches Prinzip) dadurch modifiziert, daß neue Ungleichsnebenbedingungen (Gebietsbeschränkung) eingeführt werden, so daß die Spannungen nicht über die Fließgrenze steigen können. Als Fließgrenze ist in der Haar-Kármánschen Arbeit $\tau_{\max} =$ konst. angenommen. Da sich diese Bedingung nicht durch eine einzige Gleichung in den Spannungskomponenten ausdrücken läßt, wird die Auswertung des Haar-Kármánschen Variationsprinzips etwas undurchsichtig. H. Hencky benutzt nun dasselbe Variationsprinzip, jedoch mit der Misesschen Fließbedingung, die sich durch eine einzige Gleichung in den Spannungskomponenten ausdrücken läßt. Diese Fließbedingung, die zahlenmäßig von der Bedingung $\tau_{\max} =$ konst. nur wenig abweichende Ergebnisse liefert und im übrigen bei Metallen recht gut erfüllt ist[5]), hat den großen Vorteil, daß man im Variationsprinzip nur eine einzige gebietsbeschränkende Nebenbedingung erhält.

In der Elastizitätslehre wird gezeigt, daß die Lagrangeschen Faktoren zu dem Spannungsproblem identisch sind mit den Verschiebungskomponenten. Setzt man voraus, daß dies auch noch bei dem durch die Fließnebenbedingung modifizierten Variationsproblem der Fall ist, dann erhält man nach H. Hencky für diejenigen Teile des beanspruchten Körpers, in denen die Fließgrenze erreicht ist, ein System von Gleichungen (Eulersche Gleichungen des Variationsproblems), durch welches jedem Spannungstensor eindeutig ein Dehnungstensor zugeordnet wird. Verformungen ohne Spannungsänderung sind nach dieser Theorie demnach nicht möglich. Den eigentlichen Fließvorgang im Sinne des St. Venant-

[1]) A. Reuß, ZS f. ang. Math. u. Mech. 10 (1930), S. 266.
[2]) R. v. Mises, Göttinger Nachrichten, math. phys. Kl. 1913.
[3]) A. Haar und Th. v. Kármán, Gött. Nachr. math. phys. Kl. 1909, S. 204.
[4]) H. Hencky, ZS f. ang. Math. u. Mech. 4 (1924), S. 323.
[5]) Vgl. z. B. W. Lode, VDI-Forschungsheft Nr. 303 und ZS f. Physik 36 (1926), S. 913.

Misesschen Gleichungssystems kann man naturgemäß mit einer derartigen Theorie, welche die Spannungen eindeutig mit den Dehnungen verknüpft, nicht beherrschen.

Die Reußsche Plastizitätstheorie führt nun für einen Stab, in welchem kombinierte Torsions- und Zugbeanspruchungen im Fließgebiet erzeugt werden, zu einem anderen Ergebnis als die Henckysche Theorie. In der vorliegenden Arbeit werden die Voraussagen beider Theorien mit Versuchsergebnissen an Rohren aus Stahl verglichen.

Wir spezialisieren zunächst die Henckyschen Gleichungen für den uns interessierenden Fall. Sie heißen:

$$\varepsilon_x = \frac{1+\varphi}{2G}\left[\sigma_x - \frac{\varphi + \frac{3}{m+1}}{\varphi+1}s\right] \qquad \gamma_{xy} = \frac{1+\varphi}{G}\tau_{xy}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1+\varphi}{2G}\left[\sigma_y - \frac{\varphi + \frac{3}{m+1}}{\varphi+1}s\right] \qquad \gamma_{yz} = \frac{1+\varphi}{G}\tau_{yz} \quad \ldots \ldots \quad (1).$$

$$\varepsilon_z = \frac{1+\varphi}{2G}\left[\sigma_z - \frac{\varphi + \frac{3}{m+1}}{\varphi+1}s\right] \qquad \gamma_{zx} = \frac{1+\varphi}{G}\tau_{zx}$$

Hierin ist $s = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$, G der Schubmodul, ε und γ, σ und τ die Dehnungen bzw. Spannungen. Für $\varphi = 0$ gehen die Gleichungen in das verallgemeinerte Hookesche Gesetz der Elastizitätslehre über. Außerdem gelten die bekannten Gleichgewichtsbedingungen

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{d y} + \frac{\partial \sigma_z}{d z} = 0$$

Die Funktion φ läßt sich berechnen, da außerdem noch die Fließbedingung

$$(\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = 2K^2$$

gelten muß, wo K die Fließgrenze bei einachsigem Zug oder Druck bedeutet, und wo $\sqrt{3}$ das Verhältnis der Fließgrenze bei reinem Zug zu derjenigen bei reinem Schub ist.

Wir denken uns jetzt ein Rohr so lange verdreht, bis die Fließgrenze an der Innenwand erreicht ist und dann unter weiterhin konstant bleibendem Verdrehungswinkel gezogen. Das Verhältnis der Rohrdicke zum Durchmesser spielt keine Rolle, da unter Vernachlässigung einer etwaigen Verfestigung am Ende der Verdrehung die Schubspannung sich gleichmäßig über den Querschnitt verteilt hat. Während des Zugversuches nach vorausgegangener Verdrehung bis zum Fließen soll dauernd die Missesche Fließbedingung gelten, die sich hier auf die Gleichung

$$\tau_{xy} = \sqrt{\frac{K^2 - \sigma_x^2}{3}} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

reduziert, denn alle Spannungen bis auf σ_x und τ_{xy} sind null, wir schreiben weiterhin statt dessen nur σ und τ. Wir wollen nun die Spannungs-Dehnungsfunktionen für den beschriebenen Zugversuch aus den Gleichungen (1) herleiten. Die erste der Gleichungen (1) heißt etwas umgeformt

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{3G}\left[\varphi + 1 + \frac{m-2}{2(m+1)}\right] \quad \ldots \ldots \quad (3),$$

die entsprechende Beziehung zwischen τ und γ

$$1 + \varphi = \frac{\gamma G}{\tau} \quad \ldots \ldots \quad (4).$$

Die Bedingung, daß die Verdrehung konstant gleich der Verdrehung an der Torsionsfließgrenze sein soll, heißt

$$\gamma = \frac{K}{\sqrt{3}\,G} \quad \ldots \ldots \quad (5).$$

Setzt man (2) und (5) in (4) und weiter (4) in (3) ein, dann erhält man als Spannungs-Dehnungsfunktion des Zugversuches

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{3G} \frac{K}{\sqrt{K^2 - \sigma^2}} + \frac{\sigma}{G} \frac{m-2}{6(m+1)} \quad \text{. . . . . (H 1).}$$

Die Reußsche Theorie liefert[6])

$$\varepsilon = \frac{K}{3G} \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg} \frac{\sigma}{K} + \frac{\sigma}{G} \frac{m-2}{6(m+1)} \quad \text{. . . . . (R 1).}$$

Man schreibt die Gleichungen zweckmäßig dimensionslos, indem man das Verhältnis der Dehnung zur Dehnung an der Fließgrenze

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_f} = e \qquad \text{mit } \varepsilon_f = \frac{K}{E} \qquad (E = \text{Elastizitätsmodul}),$$

das Verhältnis der Zugspannung zur Fließzugspannung

$$\frac{\sigma}{K} = p$$

und das Verhältnis der Schubspannung zur Fließschubspannung

$$\sqrt{3} \frac{\tau}{K} = t$$

einführt. Man erhält dann:

$$e = \frac{2(m+1)}{3m} \left[\frac{p}{\sqrt{1-p^2}} + p\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2(m+1)}\right) \right] \quad \text{. . . . (H 2),}$$

$$e = \frac{2(m+1)}{3m} \left[\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Tg}\, p + p\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2(m+1)}\right) \right] \quad \text{. . . . . (R 2).}$$

Die Gleichung (2) wird zu

$$t^2 + p^2 = 1 \quad \text{. . . . . (2').}$$

In Abb. 1 ist p als Funktion von e aufgetragen für $m = 10/3$. Beide Kurven (H 2) und (R 2) haben im Koordinatenanfangspunkt die gleiche Tangente, welche dem E-modul im elastischen Gebiet entspricht und dieselbe Asymptote $p = 1$, (R 2) nähert sich aber mit wachsendem e der Asymptote wesentlich rascher als die Kurve (H 2). In Abb. 2 ist t als Funktion von e aufgetragen, der Unterschied zwischen den beiden Kurven (H 2) und (R 2) ist bedeutend größer.

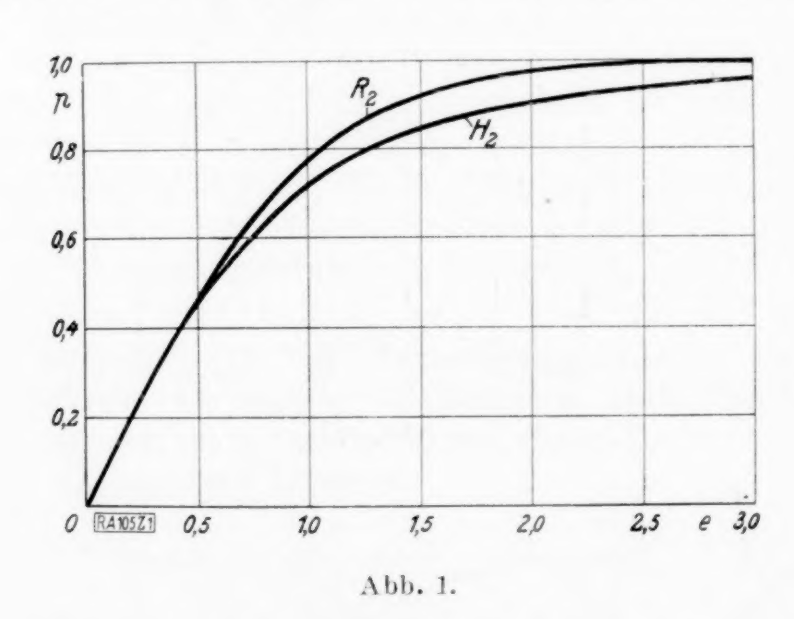


Abb. 1.

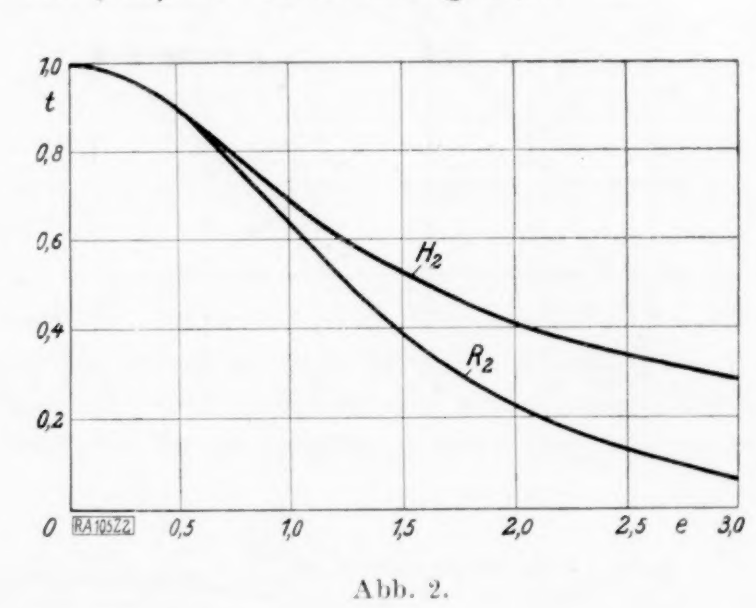


Abb. 2.

Für die Versuche wurde eine von Losenhausen hergestellte Maschine verwendet, die es gestattet, gleichzeitig Kräfte bis zu 15000 kg und Drehmomente bis zu 15000 kg/cm zu messen. Die Dehnungs- und Drehgeschwindigkeiten sind im weitesten Maße regulierbar. Abb. 3 zeigt die Vorderansicht der Maschine[7]). Eine Teilung am drehbaren Einspannkopf gestattet es, die Verdrehungen abzulesen. Die Dehnungen der Versuchsrohre wurden mit einem Martens-Spiegelapparat gemessen. Das Material der Rohre ist S.M.-Stahl von 0,08 vH C- und ca. 0,5 vH Mn-Gehalt. Die Rohre wurden aus Rundstäben hergestellt, nach dem Bohren und Vorbearbeiten bei etwa 950° gründlich ausgeglüht und dann innen und außen nachbearbeitet. Abb. 4 zeigt die Form eines Versuchsrohres.

[6]) A. Reuß vgl. a. a. O.
[7]) Die Maschine ist eine Leihgabe der Helmholtzgesellschaft.

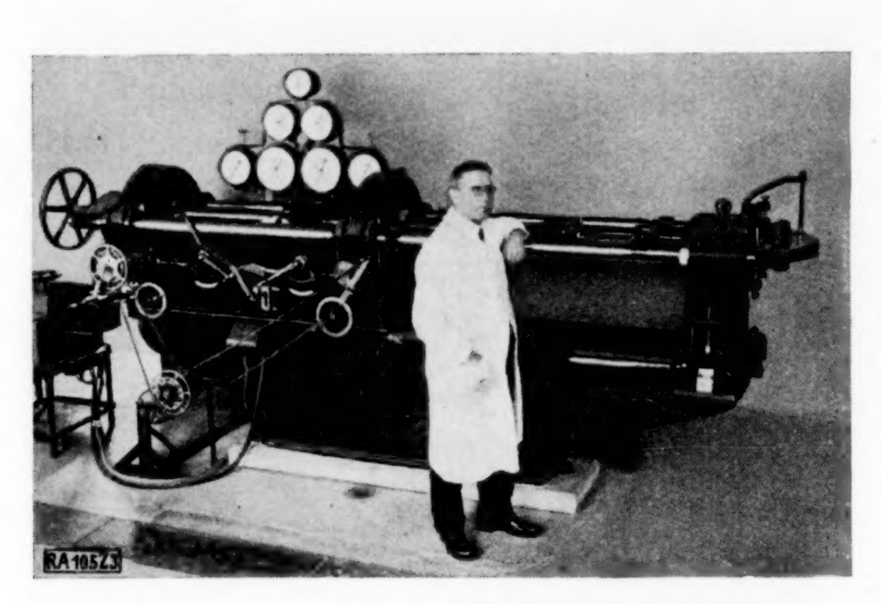


Abb. 3.

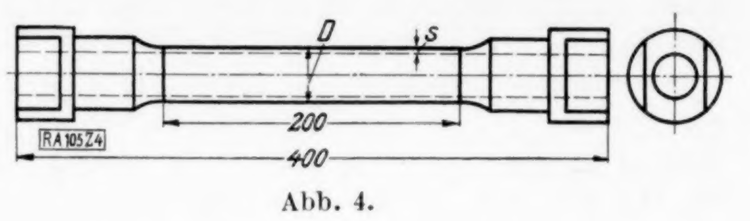


Abb. 4.

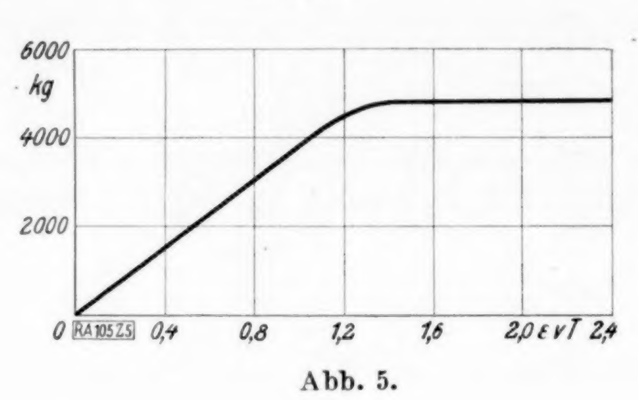


Abb. 5.

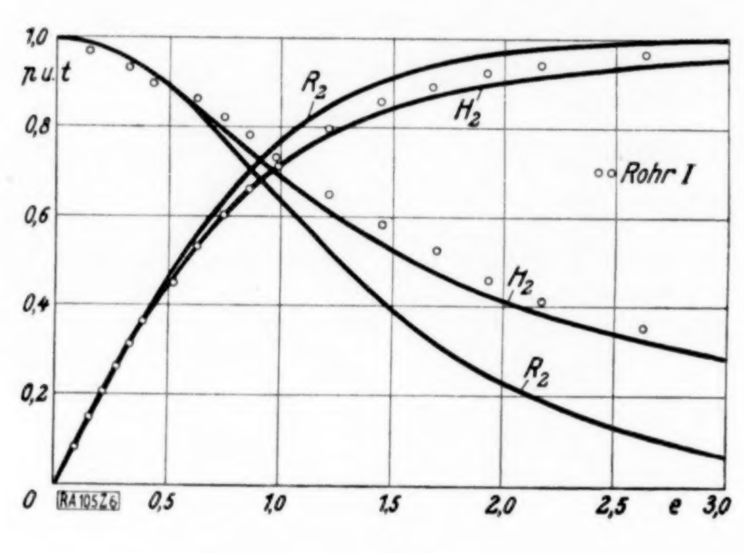


Abb. 6.

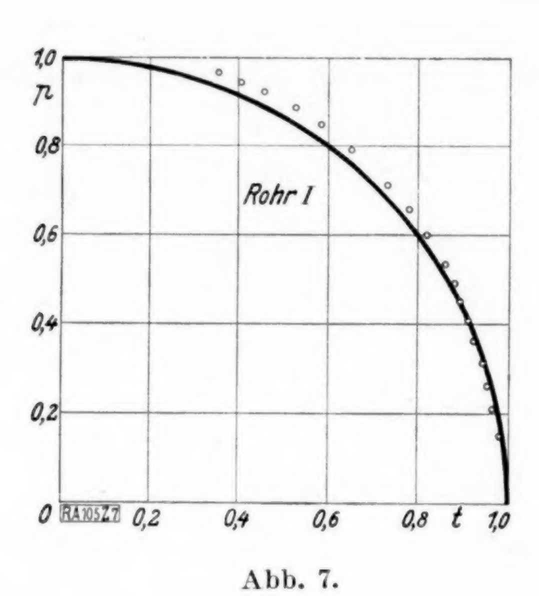


Abb. 7.

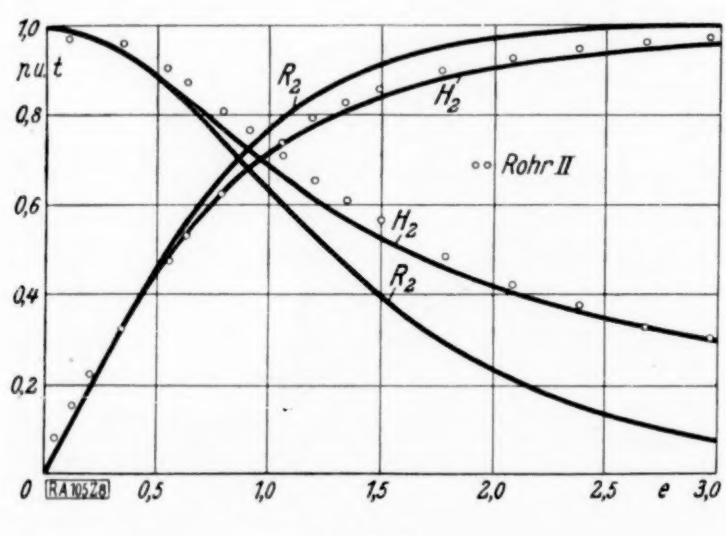


Abb. 8.

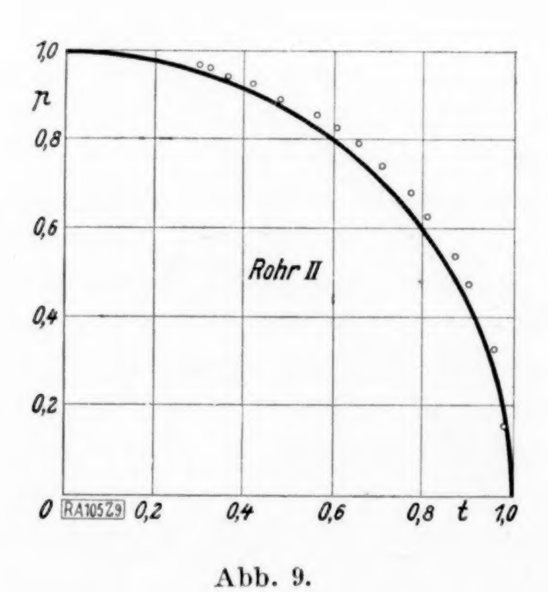


Abb. 9.

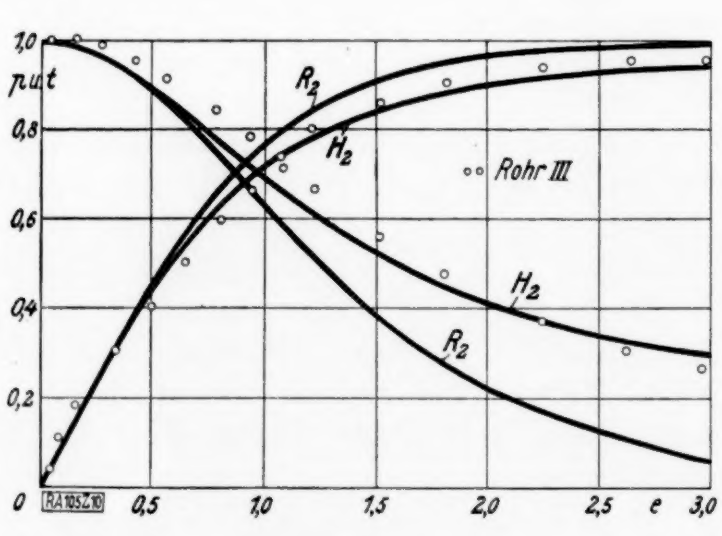


Abb. 10.

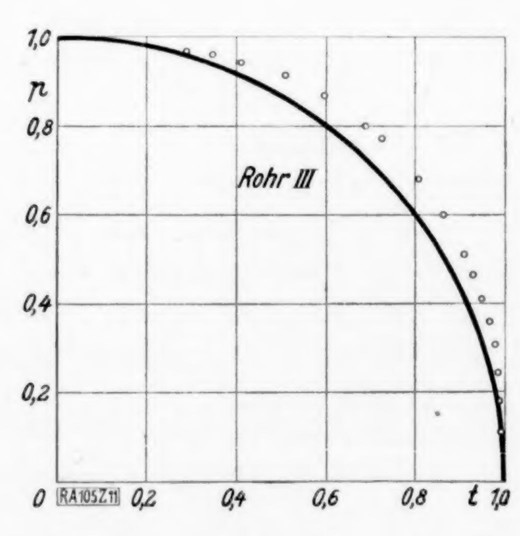


Abb. 11.

Wesentliche Vorbedingung für einwandfreie Ergebnisse der Versuche ist eine gründliche Vorreckung der Rohre. Unterläßt man dies, dann fließt das Material nicht gleichmäßig über die Meßstrecke. Andererseits dürfen die Rohre auch nicht so stark gereckt werden, daß sich die Verfestigung wesentlich bemerkbar macht. Die Versuche wurden erst einige Tage nach dem Recken vorgenommen, weil durch die Pause der zunächst ziemlich runde Übergang der Spannungs-Dehnungskurve in die Fließgerade schärfer wird.

Abb. 5 zeigt die Zugspannungs-Dehnungskurve eines Rohres kurz vor dem eigentlichen kombinierten Torsions-Zugversuch. Die Voraussetzung konstanter Fließspannung ist recht gut erfüllt. Als Fließdehnung ε_f wird diejenige Dehnung eingesetzt, die der Stab an der Fließgrenze hätte, wenn das Hookesche Gesetz bis an die Fließgrenze gelten würde.

Die Versuche wurden folgendermaßen durchgeführt: Zunächst wird das Rohr langsam verdreht bis etwa zu einer Verdrehung $\gamma = 4\gamma_f$, wobei γ_f genau analog zu ε_f definiert ist. Die Fließtorsionsspannung blieb hierbei immer recht gut konstant [8]). Die Geschwindigkeit der Verdrehung je Längeneinheit betrug etwa $1{,}5 \cdot 10^{-6}$/sek. Dann wurde das Rohr unter Konstanthaltung der Verdrehung mit einer Dehnungsgeschwindigkeit von etwa $2 \cdot 10^{-6}$/sek gereckt bis zu einer Dehnung von etwa $\varepsilon = 3\varepsilon_f$. Die Torsionsspannung ist dabei auf einen Bruchteil der ursprünglichen Fließtorsionsspannung abgesunken. Jetzt wurde das Rohr von Drehmomenten völlig entlastet und mit der gleichen Geschwindigkeit noch etwas weiter gereckt, um die Fließspannung K für reinen Zug zu erhalten. Dann sind alle Werte bekannt, um die dimensionslosen Größen p, e und t zu berechnen.

In den Abb. 6 bis 11 sind die Versuchsergebnisse von drei Versuchen an drei verschiedenen Stäben zusammengestellt, in Zahlentafel 1 sind einige Daten angegeben, nämlich die Fließzugspannung K, das Verhältnis der Fließtorsionsspannung zur Fließzugspannung $\frac{\tau_f}{K}$, welches nach der Misesschen Fließbedingung den Wert 0,577 haben sollte, der Außendurchmesser D und die Wandstärke s der Rohre.

Zahlentafel 1.

	K kg/cm²	τ_f/K	D mm	s mm
I	3300	0,52	36,3	3,31
II	2800	0,55	25,6	3,00
III	6500	0,58	25,0	2,80

Das Rohr III war sehr stark vorgereckt worden, so daß die Fließgrenze außergewöhnlich hoch gestiegen ist, damit hängt wohl auch zusammen, daß bei diesem Rohr die Fließbedingung $p^2 + t^2 = 1$ am schlechtesten erfüllt ist (Abb. 11). Trotzdem ist die Übereinstimmung mit den Kurven (H 2) ziemlich gut, während die Kurven (R 2) nicht im Einklang mit den Versuchsergebnissen stehen. Noch deutlicher geht das aus den Versuchspunkten für die Rohre I und II hervor, die der Fließbedingung $p^2 + t^2 = 1$ (Kreis in Abb. 7, 9, 11) weit besser genügen.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die Versuche eine recht befriedigende Bestätigung der Henckyschen Gleichungen darstellen, während die Reußsche Theorie im Widerspruch zu den Versuchsergebnissen steht. Es scheint, daß es außer dem Fließen bei konstanter Spannung in Metallen auch Zustände gibt, bei welchen die Spannungen sich an der Fließgrenze bewegen und dennoch ein eindeutiger Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen besteht. 105

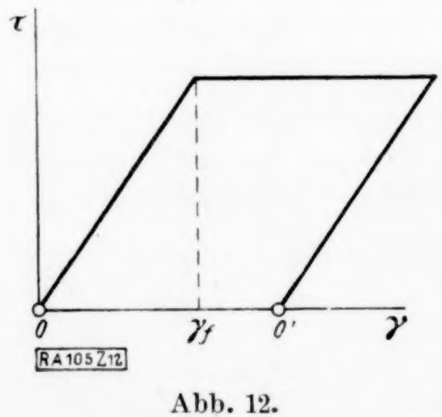


Abb. 12.

8) Wir hatten bei der Herleitung der Formel H_1 vorausgesetzt, daß die Verdrehung γ_f sein soll, obwohl wir weit über γ_f hinaus verdrehen. Man hat dabei zu berücksichtigen, daß das eigentliche Fließen, d. h. eine Verformung ohne Spannungsänderung, den Henckyschen Gleichungen widerspricht. Um dieselben in unserem Falle sinngemäß anzuwenden, muß man sich vorstellen, daß der Nullpunkt, von dem aus die γ der Henckyschen Gleichungen gerechnet werden, während des eigentlichen Fließens von 0 nach 0' nachgeschleppt wird und erst bei Beginn des Zuges bzw. bei Nachlassen des Drehmomentes liegen bleibt. Vgl. Abb. 12.

Zur Theorie der atmosphärischen Turbulenz.

Von *Hans Ertel* in Berlin.

Einleitung. Aus neuerer Zeit liegen verschiedene Versuche vor, das Problem der atmosphärischen Turbulenz mit den Methoden der statistischen Mechanik zu behandeln, wobei im Mittelpunkt des Interesses die Frage nach dem Verteilungsgesetz der Geschwindigkeiten in der Turbulenzströmung steht. Th. Hesselberg und E. Björkdal[1]) glaubten zeigen zu können, daß hier die Maxwellsche Verteilung gilt, so daß die Geschwindigkeiten in der turbulenten Strömung nach dem gleichen Gesetz verteilt sind wie die Molekulargeschwindigkeiten in einer Gasmasse, deren Schwerpunkt eine gleichförmige Translation vollführt. Gleichzeitig und unabhängig von der Hesselberg-Björkdalschen Arbeit hat A. Wagner[2]) eine ausführliche Theorie der Böigkeit und der Häufigkeitsverteilung von Windstärke und Windrichtung entwickelt, und zwar ebenfalls auf Grundlage der Maxwellschen Verteilung, unter Beschränkung auf die Horizontalkomponente der Geschwindigkeit. Kurz vorher hatte ich gelegentlich der Behandlung der Schwankungen der horizontalen Windkomponente in der Turbulenzströmung darauf hingewiesen[3]), daß der von Hesselberg und Björkdal gegebene Beweis für die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung in Turbulenzströmungen nicht als hinreichend sicher angesehen werden kann, da er den üblichen Beweisen der kinetischen Gastheorie nachgebildet ist und somit den gleichen Einwänden wie diese unterliegt[4]). Besonders anfechtbar ist die a priori postulierte Unabhängigkeit der Geschwindigkeitskomponenten voneinander, die übliche Annahme, um die Produktbildung der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Komponenten zu ermöglichen. Um diese Schwierigkeit zu umgehen, habe ich umgekehrt zuerst ein allgemeines Verteilungsgesetz (Markoff, v. Laue) für die Horizontalkomponenten angenommen, das die Möglichkeit einer statistischen Abhängigkeit (Korrelation) der Geschwindigkeitskomponenten zuläßt, und dann gezeigt, daß durch eine der Forderungen: 1. Die Richtungsverteilungsfunktion habe ein Maximum für die Richtung der mittleren (ausgeglichenen) Geschwindigkeit, oder 2. die Richtungsverteilung sei symmetrisch in bezug auf die mittlere Strömungsrichtung die Maxwellsche Verteilung der Horizontalkomponente sich ergibt[5]). Allerdings sind diese Forderungen (oder wenigstens eine von ihnen) nur für die Horizontalkomponente berechtigt, und es ist gerade der Zweck dieser Arbeit, zu zeigen, daß der gesamte Geschwindigkeitsvektor nicht nach dem Maxwellschen Gesetz verteilt sein kann, da dies den hydrodynamischen Bewegungsgleichungen widersprechen würde.

Bezeichnungen. Es seien x_i die Koordinaten, und das Koordinatensystem habe zunächst folgende Lage: $x_1 \cdot = x$-Achse nach Osten, $x_2 \cdot = y$-Achse nach Norden, $x_3 \cdot = z$-Achse vertikal; v_i seien die Geschwindigkeitskomponenten und t die Zeit. Ferner bedeuten:

p, ϱ = Druck, Dichte.
ω = Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation.
φ = geographische Breite.
μ = molekularer Reibungskoeffizient.
Δ = Laplacescher Operator.
Φ, g = Schwerepotential, Schwerebeschleunigung.

Wir gebrauchen im folgenden die Einsteinsche Bezeichnungsweise, wonach über jeden Index, der in einem Term zweimal vorkommt, zu summieren ist.

Die Bewegungsgleichungen der laminaren Grundströmung. Zwecks Aufstellung der Bewegungsgleichungen der laminaren Grundströmung gehen wir am zweckmäßigsten von der Impulsstromform der hydrodynamischen Grundgleichungen aus. Diese lauten, wenn

$$J_{ij} = J_{ji} = \varrho\, v_i\, v_j \qquad (i, j = 1, 2, 3) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

die Komponenten des Impulsstromtensors bedeuten:

$$\frac{\partial (\varrho\, v_i)}{\partial t} + \frac{\partial J_{ij}}{\partial x_j} + \varrho\, C_{ij}\, v_j = -\varrho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu\, \Delta v_i + \frac{\mu}{3} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} \quad \ldots\ldots \quad (2),$$

[1]) Th. Hesselberg und E. Björkdal, Über das Verteilungsgesetz der Windunruhe. Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre, Bd. XV (Hergesell-Festband), S. 121. Leipzig 1929.

[2]) A. Wagner, Theorie der Böigkeit und der Häufigkeitsverteilung von Windstärke und Windrichtung. Gerlands Beiträge zur Geophysik, Bd. 24, S. 386. Leipzig 1929.

[3]) H. Ertel, Die Richtungsschwankung der horizontalen Windkomponente im turbulenten Luftstrom. Ebenda, Bd. 23, S. 15. Leipzig 1929.

[4]) J. H. Jeans, Dynamische Theorie der Gase. (Deutsche Übersetzung von R. Fürth.) Braunschweig 1926, S. 73.

[5]) H. Ertel, Zur Theorie der Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung in turbulenten Strömungen. Zeitschr. f. Geophysik, 1930, S. 329 (Ad. Schmidt-Heft).

worin die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial (\varrho v_j)}{\partial x_j} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

bereits berücksichtigt ist. Die Größen $C_{ij} = -C_{ji}$ in Gl. (2) sind die Komponenten des Coriolis-Axiators

$$C = \begin{pmatrix} 0 & , -2\,\omega \sin\varphi, & +2\,\omega\cos\varphi \\ +2\,\omega\sin\varphi, & 0 & , \quad 0 \\ -2\,\omega\cos\varphi, & 0 & , \quad 0 \end{pmatrix},$$

denn die Glieder $\varrho\, C_{ij}\, v_j$, die Komponenten der „ablenkenden Kraft der Erdrotation" treten auf, weil das zugrunde gelegte, mit der rotierenden Erde starr verbundene Koordinatensystem kein Inertialsystem ist. Für unsere Zwecke können wir die molekularen Reibungsglieder

$$R_i = \mu\, \Delta\, v_i + \frac{\mu}{3} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i\, \partial x_j}$$

vernachlässigen, denn der durch die molekulare Reibung übertragene Impuls beträgt ungefähr nur den 10^{-5}-ten Teil des turbulenten Impulsaustausches. Wir schreiben also die Gl. (2) einfacher:

$$\frac{\partial (\varrho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial J_{ij}}{\partial x_j} + \varrho\, C_{ij}\, v_j = -\varrho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad \ldots \ldots \quad (4).$$

Also nicht die Navier-Stokesschen Gleichungen zäher Flüssigkeiten, sondern die hydrodynamischen Grundgleichungen idealer Flüssigkeiten sollen den Ausgangspunkt unserer Theorie bilden. Durch zeitliche Mittelwertbildung über eine genügend lange Zeit an einem fixen Punkte $P(x_i)$ des Strömungsfeldes nach dem Schema

$$\overline{\psi}(x_i) = \lim_{t \to \infty} \left(t^{-1} \int_0^t \psi(x_i, t)\, d\,t \right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

erhalten wir aus den Gl. (4), wenn wir die Größen p, ϱ und v_i als beschränkte, eindeutige und stetige Funktionen der Raumkoordinaten und der Zeit voraussetzen:

$$\frac{\partial \bar{J}_{ij}}{\partial x_j} + \overline{\varrho\, v_j}\, C_{ij} = -\bar{\varrho} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6),$$

da (nach Voraussetzung)

$$\lim_{t \to \infty} \left(t^{-1} \int_0^t \frac{\partial (\varrho v_i)}{\partial t}\, d\,t \right) = 0$$

ist. Indem wir die Geschwindigkeitskomponenten v_i in die Komponenten der mittleren Strömung (laminare Grundströmung) $\bar{v}_i$ und die Turbulenzkomponenten ζ_i zerlegen:

$$v_i = \bar{v}_i + \zeta_i,$$

wobei die ζ_i im Mittel verschwinden: $\bar{\zeta}_i = 0$, können wir die $\bar{J}_{ij}$ umformen in

$$\bar{J}_{ij} = \bar{\varrho}\, \bar{v}_i\, \bar{v}_j + (\overline{\varrho\, \zeta_i\, \zeta_j}) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7).$$

Da die relativen Schwankungen von ϱ klein sind (10^{-3} bis 10^{-4}) gegen die der ζ_i, dürfen wir für Gl. (7) schreiben:

$$\bar{J}_{ij} = \bar{\varrho}\, \bar{v}_i\, \bar{v}_j + \bar{\varrho}\, \overline{\zeta_i\, \zeta_j} = G_{ij} + T_{ij} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8).$$

Der Impulsstromtensor ist demnach die Summe zweier Tensoren, deren erster nur von den Komponenten der laminaren Grundströmung und deren zweiter nur von den Turbulenzkomponenten abhängt. Durch die Mittelbildung (5) geht die Kontinuitätsgleichung (3) in

$$\frac{\partial (\bar{\varrho}\, \bar{v}_j)}{\partial x_j} = 0$$

über, und somit wird

$$\frac{\partial G_{ij}}{\partial x_j} = \bar{\varrho} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial (\bar{v}_j\, \bar{v}_j)}{\partial x_i} + \bar{v}_j \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \right\} = \bar{\varrho} \frac{d\, \bar{v}_i}{d\, t} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9),$$

wenn mit

$$\frac{d\, \bar{v}_i}{d\, t} = \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j}$$

die substantielle Änderung von $\bar{v}_i$ bei stationärer Grundströmung bezeichnet wird. Wir erhalten somit aus den Gl. (6) mit Rücksicht auf (8) und (9):

$$\bar{\varrho}\frac{d\bar{v}_i}{dt}+\bar{\varrho}\,C_{ij}\,\bar{v}_j=-\bar{\varrho}\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}-\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i}-\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j},\quad (i,j=1,2,3)\;\ldots\ldots\ldots\ (10)$$

oder in gewöhnlicher analytischer Schreibweise (unter Vernachlässigung kleiner Glieder der ablenkenden Kraft der Erdrotation):

$$\left.\begin{aligned}
\bar{\varrho}\frac{d\bar{v}_x}{dt}-2\,\omega\sin\varphi\,\bar{\varrho}\,\bar{v}_y&=-\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}-\frac{\partial(\bar{\varrho}\,\overline{\zeta_x^2})}{\partial x}-\frac{\partial(\bar{\varrho}\,\overline{\zeta_x\zeta_y})}{\partial y}-\frac{\partial(\bar{\varrho}\,\overline{\zeta_x\zeta_z})}{\partial z}\\
\bar{\varrho}\frac{d\bar{v}_y}{dt}+2\,\omega\sin\varphi\,\bar{\varrho}\,\bar{v}_x&=-\frac{\partial\bar{p}}{\partial y}-\frac{\partial(\bar{\varrho}\,\overline{\zeta_y\zeta_x})}{\partial x}-\frac{\partial(\bar{\varrho}\,\overline{\zeta_y^2})}{\partial y}-\frac{\partial(\bar{\varrho}\,\overline{\zeta_y\zeta_z})}{\partial z}\\
\bar{\varrho}\frac{d\bar{v}_z}{dt}&=-g\,\bar{\varrho}-\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}-\frac{\partial(\bar{\varrho}\,\overline{\zeta_z\zeta_x})}{\partial x}-\frac{\partial(\bar{\varrho}\,\overline{\zeta_z\zeta_y})}{\partial y}-\frac{\partial(\bar{\varrho}\,\overline{\zeta_z^2})}{\partial z}
\end{aligned}\right\}\ (11)$$

Bei Anwendung dieser Gleichungen auf die atmosphärischen Bewegungen ist noch eine wesentliche Vereinfachung statthaft: In der Atmosphäre ist nämlich die Änderung der Turbulenzmittelwerte in horizontaler Richtung zu vernachlässigen gegen die Änderung in der Vertikalen, so daß die Gl. (11) die bedeutend einfachere Form annehmen:

$$\left.\begin{aligned}
\bar{\varrho}\frac{d\bar{v}_x}{dt}-2\,\omega\sin\varphi\,\bar{\varrho}\,\bar{v}_y&=-\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial z}(\bar{\varrho}\,\overline{\zeta_x\zeta_z})\\
\bar{\varrho}\frac{d\bar{v}_y}{dt}+2\,\omega\sin\varphi\,\bar{\varrho}\,\bar{v}_x&=-\frac{\partial\bar{p}}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial z}(\bar{\varrho}\,\overline{\zeta_y\zeta_z})\\
\bar{\varrho}\frac{d\bar{v}_z}{dt}&=-g\,\bar{\varrho}-\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}(\bar{\varrho}\,\overline{\zeta_z^2})
\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ (12).$$

Wir machen nun weiter den in der Turbulenztheorie üblichen Ansatz

$$\left.\begin{aligned}
\zeta_x&=-\left(\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial z}\right)\xi_z=v_x-\bar{v}_x\\
\zeta_y&=-\left(\frac{\partial\bar{v}_y}{\partial z}\right)\xi_z=v_y-\bar{v}_y
\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ (13),$$

in dem ξ_z die vertikale Komponente des Weges bedeutet, den die „Luftballen" im Mittel seit dem letzten Impuls bis zum Durchgang durch die durch den Punkt $P(x, y, z)$ gehende Horizontalebene zurücklegen. Der Mittelwert von $|\xi_z|$ ist der „Bremsweg" der Prandtlschen Theorie[6]). Der infolge der Turbulenz quer (senkrecht) zur laminaren Grundströmung auftretende Impulsstrom hat die Komponenten:

$$\bar{\varrho}\,\overline{v_x\zeta_z}=\bar{\varrho}\,\overline{\zeta_x\zeta_z}=-\left(\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial z}\right)\cdot\bar{\varrho}\cdot\overline{\xi_z\zeta_z},$$

$$\bar{\varrho}\,\overline{v_y\zeta_z}=\bar{\varrho}\,\overline{\zeta_y\zeta_z}=-\left(\frac{\partial\bar{v}_y}{\partial z}\right)\cdot\bar{\varrho}\cdot\overline{\xi_z\zeta_z}.$$

Soll der Impulsstrom in üblicher Weise darstellbar sein durch $-\eta\left(\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial z}\right)$ bzw. $-\eta\left(\frac{\partial\bar{v}_y}{\partial z}\right)$ mit η als „virtuellen Reibungskoeffizienten" (Austauschkoeffizient für den Impuls, Wilhelm Schmidt; „Turbulenz", Boussinesq), so muß

$$\eta=\bar{\varrho}\cdot\overline{\xi_z\zeta_z}\ \ldots\ldots\ldots\ (14)$$

sein, und durch Substitution von (13) in (12) ergibt sich mit Rücksicht auf (14):

$$\left.\begin{aligned}
\bar{\varrho}\frac{d\bar{v}_x}{dt}-2\,\omega\sin\varphi\,\bar{\varrho}\,\bar{v}_y&=-\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\eta\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial z}\right)\\
\bar{\varrho}\frac{d\bar{v}_y}{dt}+2\,\omega\sin\varphi\,\bar{\varrho}\,\bar{v}_x&=-\frac{\partial\bar{p}}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\eta\frac{\partial\bar{v}_y}{\partial z}\right)\\
\bar{\varrho}\frac{d\bar{v}_z}{dt}&=-g\,\bar{\varrho}-\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}-2\frac{\partial F_z^{(T)}}{\partial z}
\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ (15).$$

[6]) L. Prandtl, Bericht über die Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz. Zeitschr. f. angewandte Math. u. Mechanik, Bd. V, S. 136.

Hierin ist noch $E_z^{(T)} = \bar{\varrho} \cdot \frac{\overline{\zeta_z^2}}{2}$ gesetzt für den Teil der Turbulenzenergie, der durch vertikale Turbulenzkomponenten hervorgerufen wird.

Die beiden ersten Gleichungen von (15) sind die bekannten atmosphärischen Bewegungsgleichungen für horizontale Strömung, die man sich sonst gewöhnlich aus den Navier-Stokesschen Bewegungsgleichungen (inkompressibler Flüssigkeiten) durch Ersatz des molekularen Reibungskoeffizienten durch den virtuellen entstanden denkt, während wir hier aus den Bewegungsgleichungen idealer Flüssigkeiten durch zeitliche Mittelwertbildung ein Glied erhalten, das dem Reibungsglied der als zäh aufgefaßten Flüssigkeit völlig analog ist. Es scheint mir hier eine Beziehung zu dem v. Misesschen Gedanken vorzuliegen, daß sich „die Grundströmung turbulenter Bewegungsformen viel eher als eine Lösung der Eulerschen, denn als eine solche der Navier-Stokesschen Gleichungen auffassen läßt"[7]).

Es sind die beiden ersten Gleichungen von (15) bereits von Th. Hesselberg[8]) auf andere Weise abgeleitet worden, wobei jedoch gerade die Tatsache der Ableitbarkeit dieser Gleichungen aus den Bewegungsgleichungen idealer Flüssigkeiten nicht betont ist, da Hesselberg das molekulare Reibungsglied bis zum Schluß seiner Rechnung beibehält und es erst dann wegfallen läßt, da nach Gewinnung des virtuellen Reibungsgliedes „das Glied (d. h. das molekulare Reibungsglied) nicht getrennt mitgenommen werden darf" (a. a. O., S. 151, ähnlich: Geofysiske Publikasjoner, Vol. 5, No. 4).

Zudem findet Hesselberg für die vertikale Komponente von (15) eine den horizontalen Komponenten völlig analoge Gleichung (in unserer Bezeichnungsweise):

$$\bar{\varrho}\frac{d\bar{v}_z}{dt} = -g\bar{\varrho} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z}\right) \quad \text{(16)},$$

während wir fanden:

$$\bar{\varrho}\frac{d\bar{v}_z}{dt} = -g\bar{\varrho} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - 2\frac{\partial E_z^{(T)}}{\partial z} \quad \text{(17)}.$$

Ich halte die Hesselbergsche Gl. (16) aus folgendem Grunde für nicht richtig: Man erhält doch Gl. (16), indem man für ζ_z analog Gl. (13) den Ansatz macht:

$$\zeta_z = v_z - \bar{v}_z = -\left(\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z}\right)\xi_z \quad \text{(18)},$$

woraus durch Multiplikation mit $\varrho\,\zeta_z$ und Mittelbildung

$$\bar{\varrho}\,\overline{\zeta_z^2} = -\left(\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z}\right)\bar{\varrho}\cdot\overline{\xi_z\zeta_z} = -\eta\left(\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z}\right)$$

entsteht, was durch Substitution in die dritte Gleichung von (12) zur Hesselbergschen Gleichung (16) führt. Der Ansatz (18) ist indes völlig verfehlt, denn der Impulsstrom

$$\bar{\varrho}\,\overline{v_z\zeta_z} = -\left(\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z}\right)\bar{\varrho}\,\overline{\xi_z\zeta_z} = \bar{\varrho}\,\overline{\zeta_z^2}$$

verschwindet für $\left(\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z}\right) \to 0$, dagegen verschwindet dann $\overline{\zeta_z^2}$ keineswegs, denn die Strömung bleibt doch auch für $\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} = 0$ turbulent. Deshalb muß an Stelle von Gl. (18) gesetzt werden:

$$\zeta_z = v_z - \bar{v}_z = -\left(\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z}\right)\xi_z + \varepsilon_z \quad \text{(19)},$$

wo die Korrektionsfunktion ε_z von $\left(\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z}\right)$ unabhängig sein muß. Es wird dann

$$\bar{\varrho}\,\overline{\zeta_z^2} = -\eta\left(\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z}\right) + \bar{\varrho}\,\overline{\varepsilon_z\zeta_z}$$

für

$$\left(\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z}\right) = \bar{v}_z' \to 0:$$

$$\lim_{\bar{v}_z' \to 0}\overline{\zeta_z^2} = \lim_{\bar{v}_z' \to 0}\overline{\varepsilon_z\zeta_z} = \overline{\varepsilon_z^2} \neq 0,$$

[7]) R. v. Mises, Zeitschrift f. angewandte Math. u. Mechanik, Bd. 8, 1928, S. 337. (Besprechung von C. W. Oseen, Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik.)

[8]) Th. Hesselberg, Die Gesetze der ausgeglichenen atmosphärischen Bewegungen. Beiträge zur Physik d. freien Atmosphäre, Bd. XII, S. 141 (1926).

d. h. für $\bar{v}_z' \to 0$ bleibt die Strömung trotzdem turbulent. Strenggenommen wäre auch der Ansatz (13) zu erweitern in

$$\zeta_x = -\left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z}\right) \xi_z + \varepsilon_x,$$

$$\zeta_y = -\left(\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial z}\right) \xi_z + \varepsilon_y,$$

wo die ε_x, ε_y wieder von $\left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z}\right)$, $\left(\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial z}\right)$ unabhängig sind. Allein hier verschwinden die Impulsströme $\bar{\varrho} \cdot \overline{\zeta_x \zeta_z}$ und $\bar{\varrho} \cdot \overline{\zeta_y \zeta_z}$ mit $\left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z}\right) \to 0$, $\left(\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial z}\right) \to 0$; die Ansätze

$$\bar{\varrho} \cdot \overline{\zeta_x \zeta_z} = -\eta \left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z}\right)$$

bzw.

$$\bar{\varrho} \cdot \overline{\zeta_y \zeta_z} = -\eta \left(\frac{\partial \bar{v}_y}{\partial z}\right)$$

bestehen also zu Recht und deshalb ist $\overline{\varepsilon_x \zeta_z} = \overline{\varepsilon_y \zeta_z} = 0$, d. h. hier kommt man mit den Gleichungen (13) aus[9]).

Nach diesen Darlegungen halte ich es für berechtigt, Gl. (16) für falsch anzusehen; die Gleichung für die vertikale Komponente hat vielmehr die Form (17).

Diese Gleichung (17) führt übrigens zu einem interessanten Resultat. Ist nämlich in einem gewissen Gebiet G (einschließlich seines Randes) des turbulenten Strömungsfeldes die laminare Grundströmung horizontal: $\bar{v}_z = 0$, und damit auch $\frac{d \bar{v}_z}{d t} = 0$ in G, so wird Gl. (17):

$$2 \frac{\partial E_z^{(T)}}{\partial z} = -g \bar{\varrho} - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z},$$

oder, da längs einer innerhalb G gelegenen Vertikalen $x =$ konst, $y =$ konst die Funktionen $E_z^{(T)}$, $\bar{\varrho}$ und $\bar{p}$ nur von z abhängen:

$$2 \frac{d E_z^{(T)}}{d z} = -g \bar{\varrho} - \frac{d \bar{p}}{\partial z} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (20).$$

Integration vom Erdboden ($z = 0$) bis zur Höhe z ergibt wegen $\lim_{z \to 0} E_z^{(T)} = 0$ die Gleichung

$$2 E_z^{(T)} = -g \int_0^z \bar{\varrho} \, d z - \bar{p}(z) + \bar{p}(0) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (21).$$

Nun ist doch

$$p_{\text{stat}}(z) = \bar{p}(0) - g \int_0^z \bar{\varrho} \, d z$$

der statische Druck in der Höhe z, und somit gibt Gl. (21):

$$\bar{p}(z) = p_{\text{stat}}(z) - 2 E_z^{(T)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (22),$$

d. h.: Selbst wenn in Turbulenzströmungen die laminare Grundströmung horizontal ist, kann der Druck in der Vertikalen nicht streng statisch verteilt sein; der mittlere Druck ist stets kleiner als der statische, und die Abweichung ist ein reiner Turbulenzeffekt.

Eine Überschlagsrechnung zeigt, daß bei Windstärken von 10 bis 25 m/s die durch Gl. (22) definierten Abweichungen von der Größenordnung 0,06 bis 0,40 mm Hg sind[10]).

Das Verteilungsgesetz der Geschwindigkeiten. Wir kommen jetzt zum Verteilungsgesetz der Geschwindigkeiten in der Turbulenzströmung. Indem wir an dem fixen Punkte $P(x_i)$ die Geschwindigkeitskomponenten registrieren[11]), und zwar über eine genügend lange Zeit, erhalten wir alle Geschwindigkeitskomponenten $v_i = \bar{v}_i + \zeta_i$ ($i = x, y, z$) zwischen $-\infty$ und $+\infty$ mit

[9]) Für lineare Mittelbildung genügen also die Ansätze (13), nicht aber ohne weiteres für quadratische Mittel $\overline{\zeta_x^2}$, $\overline{\zeta_y^2}$. Deshalb muß ich nach dem oben Gesagten eine von mir entwickelte Methode zur Berechnung des Austauschkoeffizienten (Gerlands Beiträge zur Geophysik, Bd. 25, S. 279), die sich quadratischer Mittel vom Ansatz (13) bedient, für dringend verbesserungsbedürftig erachten, falls nicht gezeigt werden kann, daß die Fehler in erträglichen Grenzen bleiben.

[10]) H. Ertel, Die vertikale Druckverteilung in turbulenten Strömungen. Meteorologische Zeitschrift 1930, S. 222.

[11]) Wobei wir die Frage offen lassen, inwiefern unsere Registrierinstrumente dies in adäquater Weise ermöglichen.

gewissen Wahrscheinlichkeiten. Wir legen jetzt zweckmäßig die x-Achse in die Richtung der laminaren Grundströmung. Es wird dann

$$v_x = \bar{v}_x + \zeta_x, \qquad v_y = \zeta_y, \qquad v_z = \zeta_z$$

und setzen wir zur Abkürzung

$$\sqrt{(\overline{\zeta_x^2})} = h_x^{-1}, \qquad \sqrt{(\overline{\zeta_y^2})} = h_y^{-1}, \qquad \sqrt{(\overline{\zeta_z^2})} = h_z^{-1},$$

so wäre bei Annahme einer Maxwellschen Verteilung der Turbulenzkomponenten ζ_i die Wahrscheinlichkeit $F(\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z)\, d\zeta_x\, d\zeta_y\, d\zeta_z$ einer Komponente zwischen $\zeta_x, \zeta_x + d\zeta_x$; $\zeta_y, \zeta_y + d\zeta_y$; $\zeta_z, \zeta_z + d\zeta_z$:

$$F(\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z)\, d\zeta_x\, d\zeta_y\, d\zeta_z = \frac{h_x h_y h_z}{(2\pi)^{3/2}} \cdot \operatorname{Exp} - \frac{1}{2}(h_x^2 \zeta_x^2 + h_y^2 \zeta_y^2 + h_z^2 \zeta_z^2) \cdot d\zeta_x\, d\zeta_y\, d\zeta_z \;. \quad (23),$$

so daß wir die Mittelwerte

$$\overline{\zeta_i \zeta_j} = \lim_{t \to \infty} (t^{-1} \int_0^t \zeta_i \zeta_j\, dt) \qquad (i, j = x, y, z)$$

auch ausdrücken können durch

$$\overline{\zeta_i \zeta_j} = \frac{h_x h_y h_z}{(2\pi)^{3/2}} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \zeta_i \zeta_j \cdot \operatorname{Exp} - \frac{1}{2}(h_x^2 \zeta_x^2 + h_y^2 \zeta_y^2 + h_z^2 \zeta_z^2) \cdot d\zeta_z\, d\zeta_y\, d\zeta_z.$$

Dann wäre aber

$$\overline{\zeta_i \zeta_j} = 0 \text{ für } i \neq j;\ (i, j = x, y, z) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24),$$

und wir erhielten wegen (24) nicht aus den beiden ersten Gleichungen von (12) die ersten zwei Gleichungen von (15), in denen doch

$$\overline{\zeta_x \zeta_z} \neq 0 \text{ und } \overline{\zeta_y \zeta_z} \neq 0$$

sein muß, da die Gl. (15) die atmosphärischen Bewegungen richtig beschreiben, denn ihre Integrale geben z. B. für die beschleunigungsfreie Strömung $\frac{d\bar{v}_x}{dt} = \frac{d\bar{v}_y}{dt} = 0$ die tatsächlich festgestellte Rechtsdrehung des Windes (Nordhemisphäre) mit der Höhe und Konvergenz gegen den Gradientwind. Wir müssen daher die zu (24) führende Gleichung (23) für falsch ansehen. Es kann demnach nicht die Maxwellsche Verteilung für die Geschwindigkeitsvektoren gelten, sondern ein allgemeineres Verteilungsgesetz, das die Möglichkeit einer statistischen Abhängigkeit (Korrelation) der Turbulenzkomponenten ζ_i und damit auch der Geschwindigkeitskomponenten v_i zuläßt.

Ein solches Verteilungsgesetz ist durch folgenden, von A. A. Markoff[12]) eingeführten und von v. Laue[13]) verallgemeinerten Satz gegeben: Befolgen die Größen $\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z$ ($\overline{\zeta_x} = \overline{\zeta_y} = \overline{\zeta_z} = 0$) einzeln Gaußsche Verteilungsgesetze, und wird abkürzend gesetzt:

$$\overline{\zeta_x^2} = J_{xx}, \qquad \overline{\zeta_x \zeta_y} = J_{xy} = J_{yx},$$
$$\overline{\zeta_y^2} = J_{yy}, \qquad \overline{\zeta_x \zeta_z} = J_{xz} = J_{zx},$$
$$\overline{\zeta_z^2} = J_{zz}, \qquad \overline{\zeta_y \zeta_z} = J_{yz} = J_{zy},$$

ferner

$$D = \begin{vmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{vmatrix}$$

und bedeuten $D_i^{(j)}$ die zu J_{ij} adjungierten Unterdeterminanten[14]) von D, wobei wegen der Symmetrie der Determinante $D_i^{(j)} = D_j^{(i)}$, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Endpunkt des Vektors $(\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z)$ in das Intervall $(\zeta_x, \zeta_x + d\zeta_x;\ \zeta_y, \zeta_y + d\zeta_y;\ \zeta_z, \zeta_z + d\zeta_z)$ fällt, durch

$$\left.\begin{aligned} &F(\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z)\, d\zeta_x\, d\zeta_y\, d\zeta_z = \\ &\frac{d\zeta_x d\zeta_y d\zeta_z}{(2\pi)^{3/2} H \sqrt{D}} \cdot \operatorname{Exp} - \frac{1}{2D}\{D_1^{(1)} \zeta_x^2 + D_2^{(2)} \zeta_y^2 + D_3^{(3)} \zeta_z^2 + 2D_1^{(2)} \zeta_x \zeta_y + 2D_1^{(3)} \zeta_x \zeta_z + 2D_2^{(3)} \zeta_y \zeta_z\} \end{aligned}\right\} (25)$$

[12]) A. A. Markoff, Wahrscheinlichkeitsrechnung. Nach der 2. Aufl. des russ. Werkes übersetzt von H. Liebmann. Berlin u. Leipzig 1912, S. 173.

[13]) M. v. Laue, Ein Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und seine Anwendung auf die Strahlungstheorie. Annalen d. Physik, 4. Folge, Bd. 47, S. 853. Leipzig 1915.

[14]) Eine Verwechslung der jetzt verwendeten Größen J mit Komponenten des Impulsstromtensors ist wohl nicht zu befürchten.

gegeben. Bei der Anwendung dieses Satzes auf das Problem der Verteilung der Geschwindigkeitsvektoren in der Turbulenzströmung setzen wir also eine Gaußsche Verteilung der Komponenten der turbulenten Zusatzgeschwindigkeit $(\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z)$ für jede Komponente voraus. Eine Vereinfachung ergibt sich für atmosphärische Verhältnisse dadurch, daß wir zwischen ζ_x und ζ_y keine Korrelation anzunehmen brauchen (vgl. Einleitung), es ist also: $J_{xy} = J_{yx} = 0$.

Die Determinante D wird dann:

$$D = \begin{vmatrix} J_{xx} & 0 & J_{xz} \\ 0 & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{vmatrix}$$

und die Ausrechnung der Unterdeterminanten ergibt:

$$\begin{aligned} D_1^{(1)} &= J_{yy} J_{zz} - J_{yz}^2, & D_1^{(2)} &= J_{xz} J_{yz}, \\ D_2^{(2)} &= J_{xx} J_{zz} - J_{xz}^2, & D_1^{(3)} &= -J_{xz} J_{yy}, \\ D_3^{(3)} &= J_{xx} J_{yy}, & D_2^{(3)} &= -J_{xx} J_{yz}. \end{aligned}$$

Durch Einführung der als Maß des statistischen Zusammenhangs dienenden Korrelationskoeffizienten

$$r_{xz} = \frac{J_{xz}}{\sqrt{J_{xx} J_{zz}}}, \qquad r_{yz} = \frac{J_{yz}}{\sqrt{J_{yy} J_{zz}}}$$

und der schon oben benutzten Abkürzungen h_x, h_y, h_z ergibt sich dann aus Gl. (25) die Wahrscheinlichkeit, daß der Vektor der turbulenten Zusatzgeschwindigkeit in das Intervall $(\zeta_x, \zeta_x + d\zeta_x;\ \zeta_y, \zeta_y + d\zeta_y;\ \zeta_z, \zeta_z + d\zeta_z)$ fällt,

$$\left.\begin{aligned} &F(\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z)\, d\zeta_x\, d\zeta_y\, d\zeta_z \\ &= \frac{h_x h_y h_z\, d\zeta_x\, d\zeta_y\, d\zeta_z}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{1 - r_{xz}^2 - r_{yz}^2}} \cdot \operatorname{Exp} - \frac{1}{2(1 - r_{xz}^2 - r_{yz}^2)} \{(1 - r_{yz}^2) h_x^2 \zeta_x^2 \\ &+ (1 - r_{xz}^2) h_y^2 \zeta_y^2 + h_z^2 \zeta_z^2 + 2 r_{xz} r_{yz} h_x h_y \zeta_x \zeta_y - 2 r_{xz} h_x h_z \zeta_x \zeta_z - 2 r_{yz} h_y h_z \zeta_y \zeta_z\} \end{aligned}\right\} \quad (26),$$

also ein wesentlich komplizierterer Ausdruck als die Maxwellsche Verteilung (23), und noch komplizierter ist der Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit, daß der Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v}$ in das Intervall $(v_x, v_x + dv_x;\ v_y, v_y + dv_y;\ v_z, v_z + dv_z)$ falle:

$$\left.\begin{aligned} &\psi(v_x, v_y, v_z) \cdot dv_x\, dv_y\, dv_z \\ &= \frac{h_x h_y h_z \cdot dv_x\, dv_y\, dv_z}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{1 - r_{xz}^2 - r_{yz}^2}} \cdot \operatorname{Exp} - \frac{1}{2(1 - r_{xz}^2 - r_{yz}^2)} \{(1 - r_{yz}^2) h_x^2 (v_x - \bar{v}_x)^2 \\ &+ (1 - r_{xz}^2) h_y^2 v_y^2 + h_z^2 v_z^2 + 2 r_{xz} r_{yz} h_x h_y (v_x - \bar{v}_x) v_y - 2 r_{xz} h_x h_z (v_x - \bar{v}_x) v_z - 2 r_{yz} h_y h_z v_y v_z\} \end{aligned}\right\} \quad (27).$$

Die Richtigkeit von Gl. (26) prüft man durch Integration über den ganzen Geschwindigkeitsraum, da

$$\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z)\, d\zeta_x\, d\zeta_y\, d\zeta_z = 1$$

sein muß. Man integriert zunächst über ζ_z mit Hilfe der Formel

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Exp}(-p\zeta_z^2 + 2q\zeta_z) \cdot d\zeta_z = \sqrt{\frac{\pi}{q}} \cdot \operatorname{Exp}\left(\frac{q^2}{p}\right)$$

und erhält dadurch eine Maxwellsche Verteilung für die Horizontalkomponente, wie es auch sein muß, weil $r_{xy} = 0$. Die weitere Integration über die anderen Variablen ergibt dann den Wert 1.

Für die bodennahen Schichten dürften sich übrigens die Verteilungsgesetze (26) bzw. (27) etwas vereinfachen. In der atmosphärischen Grenzschicht, die nach den Untersuchungen von V. W. Ekman[15]) über dem Festland von der Größenordnung 10 m ist, wächst zwar die Geschwindigkeit mit der Höhe stark an, aber die Strömungsrichtung dreht nur äußerst schwach. Es wird dann $r_{yz} = 0$ sein.

[15]) V. W. Ekman, Eddy-Viscosity and Skin-Friction in the Dynamics of Winds and Ocean-Currents. Memoirs of the Royal Meteorological Society, Vol. II, No. 20. London 1928.

Der Durchfluß von Wasser durch konzentrische und exzentrische zylindrische Drosselspalte mit und ohne Ringnuten.

Von *Erich Schneckenberg* in Aachen.

Aufgabe: Es sollte untersucht werden, wie der Wasserverlust aus engen zylindermantelförmigen Drosselspalten durch exzentrische Verlagerung von Kern und Mantel und ferner durch Ringnuten in den Spaltflächen beeinflußt wird[1]).

1. Die Schwierigkeiten bei Herstellung und Messung sehr enger Drosselspalte.

Exzentrische Verlagerung von Drosselspalten. — Man hatte bisher immer konzentrische zylindrische Spalte untersucht. Aber bei normalen praktischen Ausführungen zur Dichtung von Wellen und Kolben an Pumpen sind solche Drosselspalte stets mehr oder weniger exzentrisch. Sie entstehen aus konzentrischen durch parallele Verlagerung der Achsen ihrer inneren und äußeren Zylinderflächen. Sie rühren nicht nur von begrenzter Genauigkeit der Fabrikation her, sondern auch von der späteren Abnutzung der Traglager oder Führungen. Sogar vollkommen genaue Zentrierung eines sehr engen zylindrischen Spaltes zur Mitte der Lagerbohrung führt bei liegenden Wellen zu Exzentrizität von Kern und Hülse; denn die Welle liegt nicht konzentrisch im Lager, sondern mehr in dessen unterer Hälfte, so daß der Kern des Spaltes in seiner zur Bohrung des Lagers genau zentrierten Hülse oben mehr radiales Spiel hat als unten. Diese Exzentrizität ist, da die Lager für schnellaufende Zentrifugalpumpen mit der Dinpassung[2]) „leichter Laufsitz" ausgeführt zu werden pflegen, bei sehr engen Spalten beträchtlich, um so mehr je größer der Durchmesser der Lager ist, denn Spiel und Toleranz der Passungen wachsen mit der 1,5ten Potenz des Durchmessers. Auch die Durchbiegung von Wellen bewirkt exzentrische und zwar schräge Einstellung des Kerns zur Hülse. In jedem Fall fließt mehr Wasser hindurch als durch den konzentrischen Spalt gleichen lichten Querschnitts. Man hat das wiederholt in der Praxis beobachtet, aber die Erscheinung war bis jetzt nicht geklärt.

Hohe Anforderungen an Drosselspalte. — Die neueste Praxis verlangt sehr kleine Spaltweiten. Bei den Kesselspeise-Kreiselpumpen für die Hochdruck-Dampfanlagen in den Großkraftwerken Klingenberg bei Berlin und in Mannheim muß bei Speisewasser von etwa 200° C, also bei sehr großer Dünnflüssigkeit, der Druck von 110 *at* (!) durch zwei hintereinandergeschaltete Ringspalte von etwa 120 mm und 175 mm Länge abgedrosselt werden. Zwischen diesen beiden liegt ein geschlossener Ringraum, und ein anderer liegt am Austritt des zweiten Spaltes. Der Wellendurchgang aus letzterem ins Freie wird dabei mit einer einfachen Stopfbüchse mit gewöhnlicher Baumwollpackung gedichtet, die aber wegen der sehr hohen Umdrehungszahl der Welle $n = 5000$ nur ganz schwach angezogen werden darf. Diese Stopfbüchse kann nicht viel Druck aufnehmen, so daß also, um trotz des sehr hohen Druckes von 110 *at* die Geschwindigkeit des Wassers im Spalt und somit den Wasserverlust gering zu halten, die Spaltweite sehr klein bemessen werden mußte.

Engstmögliche Spaltweiten stellt man praktisch neuerdings sogar dadurch her, daß man Kern und Hülse fast stramm aufeinanderpaßt und sie sich unter großer Vorsicht reiben und bis zu reibungsfreier Passung selbst einlaufen läßt.

Schwierigkeiten der Untersuchung enger Spalte. — Um den Einfluß von Exzentrizität und von Ringnuten auf die Durchflußmenge zu bestimmen, insbesondere auch einmal bei sehr engem Spalt, entwarf Verfasser einen konzentrisch und exzentrisch einstellbaren zylindrischen Spalt (Abb. 1). Über die Schwierigkeiten, welche bei Versuchen mit sehr engen Spalten vorkommen, schrieb bereits Becker (Mitt. Forsch.-Arb. H. 48, S. 29 oben): „Jedenfalls wird man bei Spaltweiten von weniger als 0,2 mm nicht mehr mit Meßgeräten auskommen, die nur eine Ablesung von 0,01 mm gestatten; und vor allen Dingen müssen dann Rohr und Bolzen so genau zylindrisch hergestellt sein, daß eine Messung auf 0,001 mm nicht durch Unregelmäßigkeiten der Zylindermäntel illusorisch wird."

Ausschaltung der Schwierigkeiten. — Bei dem Durchflußapparat Abb. 1 wurde nun die Schwierigkeit, die engen Ringspalte sehr genau auszumessen, dadurch umgangen, daß der Ringspalt möglichst großen Durchmesser (81 mm) erhielt, so daß 0,5 mm Fehler im Durchmesser noch nicht 1 vH Ungenauigkeit bei der Durchflußerrechnung ergeben hätte; und insbesondere dadurch, daß die Spaltweite von 1 mm bis 0 mm einstellbar war und einfach durch zwischengelegte Meßklötze, deren Länge das 200fache der Spaltweite betrug, also mit 200facher Vergrößerung gemessen wurde.

---

[1]) Ausführlichere Behandlung dieser Aufgabe enthält die Schrift: Schneckenberg, „Der Durchfluß von Wasser durch enge konzentrische und exzentrische Ringspalte mit und ohne Ringnuten", Aachen 1929. — Verschiedene Kurzberichte daraus vgl. Zeitschr. d. Vereins Deutscher Ingenieure, Bd. 74, 1930, S. 485; Z. f. technische Physik, Bd. 11, 1930, S. 354 bis 357; (Uhlands) Maschinenkonstruktion und Betriebstechnik, Organ d. Deutsch. Polytechn. Gesellsch., Bd. 63, 1930, S. 338 bis 340.

[2]) Deutsche Industrie-Normen, Dinblatt 784.

2. Ein praktischer Drosselspalt für Versuche mit verschiedenen Spaltweiten bei Konzentrizität und bei Exzentrizität.

Der einstellbare, genau meßbare Drosselspalt des Verfassers. — Zu diesem Zweck war der bei A erkennbare Kegel 1 : 100 in einer entsprechend kegeligen Hülse B von 206,5 mm Länge in axialer Richtung verschiebbar angebracht. In der einen Endlage war der Spalt geschlossen, in der anderen um 1 mm geöffnet. Da dem Kegel 1 : 100 eine Neigung des Mantels zur Achse 1 : 200 entspricht, so war die Verschiebung des Kegels zwischen 0 und 1 mm Spaltweite insgesamt 200 mm groß. Der Kegel war 430 mm lang und stand in seiner Schlußlage mit dem weiten Ende noch 15 mm aus der Hülse heraus. Beide waren aus bestem Rotguß hergestellt und von einer der besten Schleifmaschinenfabriken sorgfältig geschliffen worden. Leider ist dabei die Hülse am engen Ende etwa 0,016 mm im Durchmesser enger ausgefallen als der Neigung des Kegels entspricht. Während sie am engen Ende satt auf dem Kegel auflag, ließ sie am weiten Ende bei konzentrischer Lage etwa 0,008 mm Spalt. Dieser Fehler machte sich bei den kleineren Spaltweiten in der Durchflußmenge deutlich bemerkbar.

Konzentrische und exzentrische Einstellbarkeit des Spaltes. — Der Kegel war auf einem zylindrisch geschliffenen, dicken starren Schaft C verschiebbar. An jedem Ende war er mittels 3fach geschlitztem Spannkonus D durch Ringmutter E auf den Schaft aufgepreßt, so daß er sich durch Verstellen der Mutter leicht oder schwer verschiebbar machen, auch festklemmen und somit auf dem Schaft selbst schleifen ließ. Den Schaft hielten an seinen Enden je drei radiale, unter 120° versetzte Kopfschrauben, die in den Naben der beiden dreiarmigen Lagerkörbe G saßen und es dank größerer Bohrung der Naben ermöglichten, den Schaft gegebenenfalls bis zu 1,5 mm exzentrisch einzustellen oder aber samt dem Kegel zur Durchflußhülse zu zentrieren und festzuspannen. Die Spaltweiten wurden durch axiale Verschiebung des Kegels mittels zweier Vierflügelmuttern H eingestellt, die, zwischen der Nabe des unteren Lagerkorbes und einer in Abb. 1 nur halbseitig eingezeichneten Flacheisenbrücke J sitzend, an den Stahlspindeln K zogen, die in die untere Ringmutter eingeschraubt waren.

Anwendung gestaffelter Meßklötze. — Gemessen wurde die Spaltweite durch Meßklötze M, die zwischen dem Kegelende und der Lagerkorbnabe eingelegt wurden und deren Dicke gleich dem 200fachen der Spaltweite war. Die Klötze waren längsgeteilte zylindrische Messingstücke mit runden Ausnehmungen für den Schaft C und die Stahlspindeln K, so daß sie von der Seite her eingesetzt werden konnten. Durch Anziehen der Spindeln K wurden die Klötze fest aufeinandergepreßt. Die Lage des Kegels bei Spaltweite 0 war durch sehr strammes Einsetzen des Kegels in die Hülse ermittelt und der nach Verschiebung um 200 mm noch übrige kleine Zwischenraum zwischen Stirnfläche des Kegels und Innenseite der Lagerkorbnabe durch abgepaßte Beilagen ausgefüllt worden.

Sicherung reiner Spaltströmung. — Ein Blechbehälter mit einem Überlaufrand etwas unterhalb p_2, der an zwei hohen Rändelmuttern L hing, machte die Wasserströmung am ganzen Umfang des Spaltaustritts durch Stauung gleichmäßig und verhinderte, daß während der Versuche Luft in den Spalt drang. Damit kein Wasser durch das Innere des Kegels am Schaft entlang fließen konnte, waren die Hohlräume im Kegel und in den Spannkonussen mit einer Schmelze von Wachs und Rindertalg ausgegossen und innen vor dem 1 mm weiten Spalt am Rande F der Ringmuttern E beim Anziehen ein gut 1 mm breiter Ring aus 4 mm dickem Sohlenleder mit der Mutter fest- und zu Winkelprofil plattgepreßt worden.

3. Die Versuchsmethoden und besondere Beobachtungen am Spalt.

Prüfung der Zentrierung und Exzentrierung durch Tastnadeln. — Die Lage des Kegels in der Hülse wurde durch Einstecken einer Tastnadel geprüft, einer runden, sehr schlank verjüngten Nadel aus Stahldraht, die, an drei Meßstellen zwischen den drei Armen des Lagerkorbes mit einer bestimmten Kraft in den Spalt gedrückt, die Spaltwände nur mit zwei gegenüberliegenden Punkten berührt und deren Einstecktiefe an einem angelegten kurzen Maßstab abgelesen wurde. Diese Nadel ermöglichte sehr genaues Zentrieren von Kegel und Hülse. Das zeigte sich durch die häufig fast ganz genaue Übereinstimmung der Durchflußmengen der *Wu*- und *Eu*-Versuche (*w*eites oder *e*nges Kegelende *u*nten) bei gleichem Druckabfall $(p_1 - p_2)$. Wie nämlich festgestellt wurde, ergeben sich schon bei nur der geringsten exzentrischen, schrägen oder windschiefen Stellung des Kegels sehr große Unterschiede in den *Wu*- und *Eu*-Durchflußmengen. Zur Einstellung des Kegels auf volle Exzentrizität wurde mit einem auf 0,02 mm verjüngten Spion ausprobiert, ob der Kegel der Hülsenwand so nahe war, daß er bei geringstem weiteren Anziehen der Radialschrauben der Lagerkorbnaben zum Aufliegen kam. Hierdurch wurden Eindrückungen des Randes der Hülse vermieden. Eine Einstellung des Kegels am einen Ende bewirkt nämlich, da der Schaft hierbei

infolge der Lagerung nach Abb. 1 als Hebel wirkt, auch eine kleine Verstellung des Kegels am anderen Ende. Ist er oben bereits zentriert, unten aber noch nicht, so wird beim unteren Zentrieren die bereits erreichte obere Zentrierung wieder gestört. Man konnte also den Kegel in die gewollte Lage nur absatzweise einpendeln und nicht glattweg einfahren.

Herstellung vollkommen idealer Meßöffnungen. — Große Sorgfalt ist auf genaue Abrundung der Meßöffnungen für p_1 und p_2 (Abb. 1) an der Innenfläche der Hülse verwandt worden. Die Öffnungen hatten 1 mm lichte Weite und sollten beide ganz gleichmäßig ringsum mit 1 mm Radius am Umfang abgerundet werden, da solche Öffnungen bekanntlich sehr verschiedene Drücke angeben, wenn bei sonst gleichen Verhältnissen ihre Randform verschieden ist. Bedauerlicherweise finden sich in den Berichten über derartige Meßöffnungen niemals Angaben über das zur Herstellung der Abrundung benutzte Werkzeug. Erst nach eingehenden Versuchen gelang es, ein Werkzeug herzustellen, das allen Anforderungen entsprach und ein sehr genaues und sehr sauberes Arbeiten ergab. Es wurde ein glühender Stahldraht von 1 mm Durchmesser über einer scharfen (!) rechtwinkligen Kante rechtwinklig umgehämmert, wobei sich dieser Draht sehr genau mit einem Radius 1 mm krümmte. Etwa 10 mm unterhalb dieses Knickes wurde der Draht abgeschnitten. Dieses Ende wurde später als Führung in die Meßöffnung eingesteckt. Das andere wurde etwa 5 mm lang gelassen und kurz hinter dem Knick unter 45° aufwärts gebogen. Die Knickstelle wurde in der Knickebene bis auf halbe Dicke abgeschliffen, so daß die 1 mm-Rundung durch die Kante eines Halbrundstähles gebildet war. Das Ganze wurde dann gehärtet. Nach dem Einsetzen in die abzurundende Meßöffnung wurde auf den aufwärts gebogenen kurzen Arm ein Stückchen Preßspan gehalten und unter vorsichtigem leichten Druck auf ihn der Fräser wie mit einer Kurbel gedreht. Die Fräserkante federte hierbei genügend, um an den hohen wie an den tiefen Stellen der Wölbung der Spaltfläche die Abrundung ganz gleichmäßig in der gewölbten Fläche auslaufen zu lassen. Zum Schluß wurde die Abrundung noch mit unter den Fräser gelegtem Schmirgelpapier 00 poliert. Diese Meßöffnungen zeigten bei beiden Richtungen der Strömung im Drosselspalt genau denselben Druck, was sich später an der guten Übereinstimmung der Durchflußmengen bei den *Wu*- und *Eu*-Versuchen erkennen ließ.

Messung der Drosselung im Spalt. — Als Druckmesser wurde das in Abb. 2 schematisch dargestellte Quecksilbermanometer benutzt, und leicht zu lösende Rohrverschraubungen bei p_1 und p_2 ermöglichten eine gute Entlüftung der Druckschläuche des Manometeranschlusses. Beobachtet wurde die Differenz der Quecksilberkuppen h in cm. $p = (p_1 - p_2)$ in *at* war der Druckabfall im Spalt auf 181,5 mm Länge. Mit den Einheitsgewichten $\gamma_q = 0{,}01357$ und $\gamma_w = 0{,}001$ kg/cm³ bei 15° C war $p = 0{,}01257\ h - 0{,}018$; entsprechend $p = 1$ *at* bei $h =$ rd. 81 cm.

Abb. 1. Von 1 bis 0 mm Spaltweite sowie konzentrisch und exzentrisch einstellbarer Drosselspalt mit 200fach vergrößerter Meßbarkeit der Spaltweite.

Filterung und Wägung des Wassers. — Die aufgefangenen Durchflußmengen wurden mit geprüfter Dezimalwage und die zugehörige Zeit mittels Zehntelsekunden-Stoppuhr gemessen. Das Wasser ging vor seinem Eintritt in den Spalt durch ein über dem oberen Lagerkorb zwischen den Rohrflanschen befestigtes hutförmiges Filter mit 3 aufeinanderliegenden Schichten Chiffon, damit der Spalt vor Rostteilchen geschützt war. Der Apparat ist stets in vertikaler Lage benutzt worden, um ringsum im Spalt die gleichen Druckverhältnisse zu haben. Den Chiffon stützte ein durch Drahtspirale versteifter Hut aus Messinggewebe.

Aufhebung der Schwerkraft im Spalt. — Gleich zu Anfang wurde geprüft, ob bei der senkrechten Lage des Spaltes die Schwerkraft, die hier in Richtung der Strömung wirkt, aber bei der üblichen Herleitung der Formeln für die Durchflußmenge unberücksichtigt bleibt, die Durchflußmenge merklich beeinflußt. Zu diesem Zweck wurden Gegenversuche ausgeführt, bei denen die Wirkung der Schwerkraft im lotrechten Spalt dadurch aufgehoben war, daß das ursprüngliche Staugefäß (Abb. 1), das nur einen Stau von etwa 10 mm über den Austrittsrand des Spaltes geben konnte, noch mit einem weiteren Gefäß mit 250 mm höherem Stau, d. i. bis rd. 70 mm oberhalb der Meßstrecke, umgeben wurde. Die Spaltweite war hierbei 0,175 mm, der Druck $p = 1{,}0$ und 2,0 *at* und die Strömung rein laminar. Es ergab sich 0,7 vH bzw. 0,4 vH Mehrdurchfluß infolge der Schwerkraft. Der Einfluß wird offenbar um so geringer, je höher der Druck p und je enger der Spalt. Der Unterschied brauchte aber nicht weiter berücksichtigt zu werden, weil er gegenüber anderen wahrscheinlichen Meßfehlern nur klein war und insbesondere schon der Zweck der Versuche erfüllt war, wenn bei den Versuchen mit Exzentrizität oder mit Nuten alle wirkenden Kräfte dieselben waren wie bei den Versuchen ohne Exzentrizität bzw. ohne Nuten. Dagegen hätte bei wagerechter Lage des Spaltes seine Oberseite unter rd. 8 cm geringerer geodätischer Druckhöhe gestanden als seine Unterseite, und das wären bei 0,25 und 0,1 *at* Gesamtdruckhöhe schon 3,2 bzw. 8 vH Ungleichheit in der Einströmung gewesen. Zwischen den Durchflußmengen der *Wu*- und der *Eu*-Versuche zeigte sich später stets ein noch etwas kleinerer Unterschied, als der Größe des *Wu*- und des *Eu*-Austrittsquerschnittes entsprach.

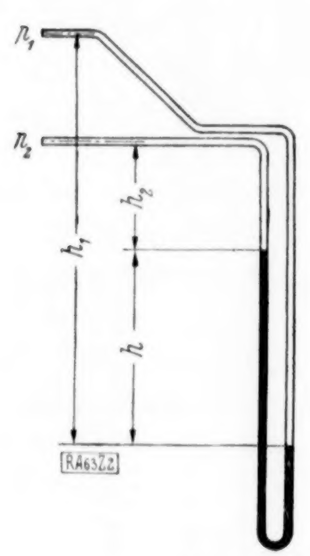


Abb. 2. Quecksilbermanometer, das mit zwei Druckschläuchen an die in Abb. 1 ersichtlichen Verschraubungen p_1 und p_2 der 1 mm-Meßöffnungen des Drosselspaltes angeschlossen wurde.

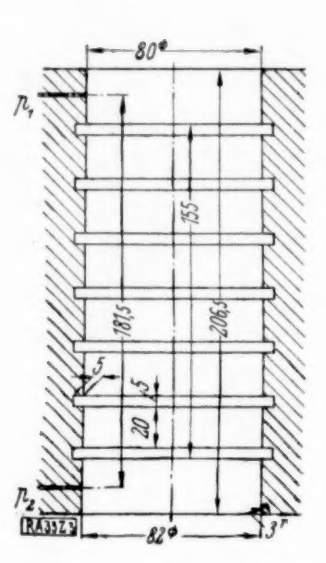


Abb. 3. Mantel des Drosselspaltes nach Einstechen der 7 Ringnuten von 5 mm Breite und Tiefe.

Einstechen der Ringnuten im Spalt. — Nachdem alle Versuche ohne Ringnuten ausgeführt waren, wurden von innen in die Hülse 7 zylindrische Nuten von 4 mm Breite und 5 mm Tiefe mit 25 mm Abstand von Mitte bis Mitte eingestochen unter sorgfältigster Schonung der geschliffenen Fläche. Abb. 3 zeigt die Hülse mit Nuten. Das Einstechen der Nuten bereitete dadurch Schwierigkeit, daß trotz Verwendung schärfster Schneidstähle und schwächsten seitlichen Vorschubes neben den Nutenrändern breite Wülste von einigen Hundertsteln Millimeter Höhe entstanden und die geschliffene Fläche erst in einigen Millimetern Entfernung unbeeinflußt blieb. Nur durch äußerst sorgsames und leises Abschaben dieser Wülste am rotierenden Stück und sehr häufig wiederholtes Tuschieren des Kegels in der Hülse gelang es, wieder die ursprüngliche Schlußstellung des Kegels zu erreichen, ohne daß weder die Innenfläche der Hülse noch die Außenfläche des Kegels, die ja nicht wieder nachgeschliffen werden konnten, viele Schönheitsfehler erlitten hätten, obgleich sich z. B. beim Einsetzen des Kegels zum Tuschieren sofort jeder Nutrand oder -grat in die Kegelfläche eindrücken und einschneiden wollte.

Pfeifende Wasserströmung. — Überraschend war, daß dieser so dick und starr gebaute Spalt bei Konzentrizität bei den *Eu*-Versuchen mit Nuten im Falle von 1 mm Spaltweite und $p_1 - p_2 = 2$ *at* so stark in stehende Schwingungen geriet, daß er ununterbrochen heimchenhell pfiff; bei 1 *at* dagegen pfiff er den Ton *a* ungefähr so vernehmlich wie eine vielleicht 800 m entfernte Fabrikpfeife. Bei allen anderen Versuchsreihen fiel ein Pfeifen nicht auf.

4. Die mathematischen Rechnungsgrundlagen für den Durchfluß im Spalt.

Für die Auswertungen der Versuche sind die folgenden Bezeichnungen und theoretisch hergeleiteten Beziehungen benutzt worden. Alle Werte im m-kg-sek-System: v_m mittlere Durchflußgeschwindigkeit im Spalt, also Mittelwert des Geschwindigkeitsprofiles in ihm.

d Durchmesser eines Rohres, a Spaltweite $(d_a - d_i):2$, d_m mittlerer Durchmesser des Ringspaltes $(d_a + d_i):2$, D_m desgleichen beim kegeligen Spalt (Abb. 1) in der halben Länge der Meßstrecke zwischen p_1 und p_2, F ausgefüllter Querschnitt, U benetzter Umfang, $r' = F:U$ Profilradius, l Spaltlänge zwischen den Meßstellen p_1 und p_2, p Druckdifferenz $(p_1 - p_2)$, η Zähigkeit in kgsek/m², γ Einheitsgewicht der Flüssigkeit, g Erdbeschleunigung, λ Widerstandsziffer.

I. Bei laminarer Strömung. — Hier gilt für den konzentrischen Spalt:

$$v_m = \frac{a^2 p}{12 \eta l} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (1).$$

Ist der Spalt jedoch um den Abstand e exzentrisch, so sind die Geschwindigkeitsprofile und ihre Mittelwerte v_m je nach der Spaltweite der betreffenden Stelle verschieden. Der gesamten Durchflußmenge entspricht hier eine mittlere Ausflußgeschwindigkeit c_m. Diese ist

$$c_m = \frac{a^2 p}{12 \eta l}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{e^2}{a^2}\right) \quad \dots \dots \dots \dots \quad (2).$$

Für $e = a$ ergibt die Klammer 2,5 und, weil ja beim konzentrischen Spalt $c_m = v_m$ ist, kann man das c_m bei voller Exzentrizität als das 2,5fache desjenigen bei Konzentrizität auffassen. Da überdies der Durchgangsquerschnitt des exzentrischen Spaltes insgesamt ebenso groß ist wie derjenige des konzentrischen, so müssen auch die minutlichen Durchflußmengen q in diesem Verhältnis stehen, mithin muß

$$q_e = 2{,}5\, q_k \quad \dots \dots \dots \dots \quad (3),$$

d. i. 150 vH größer sein.

II. Bei turbulenter Strömung. — Hier erhält man nach der allgemein gültigen Formel für Strömung durch Kanäle $p = \psi \cdot (l : r') \cdot \gamma \cdot (v_m^2 : 2g)$ in derselben Weise wie sich mit $r' = d:4$ und $4\psi = \lambda$ für gefüllte runde Rohrleitungen

$$p = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \gamma \cdot \frac{v_m^2}{2g} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (a)$$

ergibt, für den konzentrischen Spalt mit $r' = d_m \cdot \pi \cdot a : 2 d_m \cdot \pi = a:2$

$$p = \lambda \cdot \frac{l}{2a} \cdot \gamma \cdot \frac{v_m^2}{2g} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (4)$$

oder

$$v_m = 2\sqrt{\frac{a g p}{l \lambda \gamma}} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (5).$$

Die Werte λ nach Gl. (a) für Rohrleitungen und (4) für Ringspalte bei gleicher Reynoldsscher Zahl R' sind unmittelbar vergleichbar.

Für den exzentrischen Spalt erhält man nach Abb. 4 bei dem Winkel φ eine Spaltweite $s = (a - e \cos \varphi)$ und eine sekundliche Durchflußmenge in der Elementarfläche dF an dieser Stelle

$$dQ = dF \cdot v_m = 0{,}5\, D_m \cdot d\varphi \cdot s \cdot v_m = 0{,}5\, D_m \cdot d\varphi\,(a - e\cos\varphi) \cdot 2\sqrt{\frac{(a - e\cos\varphi)\, g p}{l \lambda \gamma}}$$

$$= D_m \cdot \sqrt{\frac{g p}{l \lambda \gamma}} \cdot (a - e\cos\varphi)^{3/2} \cdot d\varphi.$$

Für volle Exzentrizität $(e = a)$ wird

$$Q = 2\int_0^\pi dQ = 2 D_m \cdot a \cdot \sqrt{\frac{a g p}{l \lambda \gamma}} \cdot \int_0^\pi (1 - \cos\varphi)^{3/2} \cdot d\varphi \quad \dots \dots \quad (6).$$

Für die Herleitung der Gl. (1), (2) und (6) nach Becker vgl. Mitt. Forsch.-Arb. Heft 48, S. 29. Die Formel (6) hat Becker nicht integriert; und die Formel (2) hat er nicht nachgeprüft, weil sein Versuchsapparat nicht exzentrisch einstellbar war. Von der Gültigkeit der Formel (2) nahm er an, daß sie auf den Grenzfall $e = a$ nicht anwendbar sei, weil bei ihrer Ableitung der Einfluß der inneren Reibungskräfte, in den Ebenen senkrecht zur Umfangsrichtung in der Strömungsrichtung, vernachlässigt ist und dies nur zulässig erscheine, solange die größte und kleinste Spaltweite nicht zu sehr voneinander abweichen.

Das Integral gibt, graphisch ermittelt (Abb. 5), den Wert $y_m \cdot \pi = 3{,}8$. Somit wird $Q = 7{,}6 \cdot D_m \cdot a \cdot \sqrt{\frac{a\,g\,p}{l\,\lambda\,\gamma}}$ und da $F = D_m \cdot \pi \cdot a$ ist, wird

$$c_m = Q/F = 2{,}42 \sqrt{\frac{a\,g\,p}{l\,\lambda\,\gamma}} = 1{,}21\ v_m \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

und demgemäß ist

$$q_e = 1{,}21\ q_k \quad \ldots \ldots \quad (8),$$

d. i. rd. 20 vH größer.

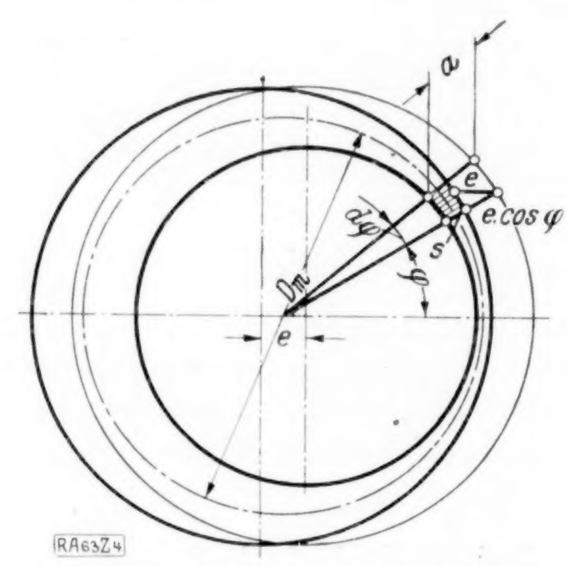


Abb. 4. Die Veränderlichkeit der Spaltweite bei einer Exzentrizität e zwischen Kern und Mantel in Abhängigkeit vom Winkel φ.

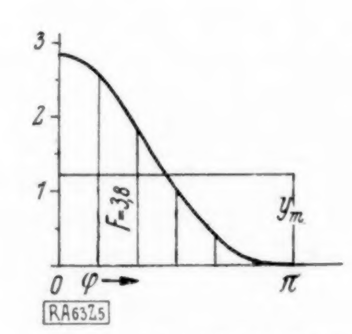


Abb. 5. Graphische Integration des Ausdrucks $\int_0^{\pi} (1 - \cos\varphi)^{3/2} \cdot d\varphi$.

III. Die theoretische Durchflußmenge. — Mit den Werten v_m und c_m nach Gl. (1) und (2) oder (5) und (7), je nachdem, ob die Strömung laminar oder turbulent ist, ergibt sich die Durchflußmenge

bei Konzentrizität $q_k = 6 \cdot 10^4 \cdot F \cdot v_m$ in kg/min . . . . (9a),

bei Exzentrizität $q_e = 6 \cdot 10^4 \cdot F \cdot c_m$ in kg/min . . . . (9b).

In $F = \pi \cdot D_m \cdot a = \pi \cdot (D_a - a) \cdot a$ war bei dem kegeligen Spalt (Abb. 1) $D_a = 8{,}1 \cdot 10^{-3}\ m$ einzusetzen.

Für die Reynoldssche Zahl R ist nach dem Vorgang von Becker und von Winkel als Länge die Spaltweite a benutzt, also $R = \frac{v_m \cdot a\,\gamma}{g\,\eta}$ gesetzt worden. Dagegen sind mit dem Profilradius gerechnete Reynoldssche Zahlen durch R' bezeichnet.

5. Die Versuchsergebnisse und ihre Auswertung im allgemeinen.

Die gemessenen Durchflußmengen $q = f(p)$. — Diese zeigt Abb. 6, in der rechten Hälfte bei vollexzentrischen Drosselspalten, in der linken bei konzentrischen. Es sind die Logarithmen der Durchflußmengen q über den Logarithmen der Drücke p aufgetragen. Setzt man q gleich der n-ten Potenz von p, also $q = C \cdot p^n$, so ist $\log q = \log C + n \cdot \log p$. Die Konstante C bewirkt lediglich eine Vergrößerung aller Ordinaten $\log q$ um ein und dasselbe Stück und n bedeutet die Tangente des Neigungswinkels der Kurve zur p-Achse. Zweierlei Gerade zeigt Abb. 6. Bei laminarer Strömung ist nach den Gl. (9a) und (1) bzw. (2) die Durchflußmenge $q = C_1 \cdot p$, also $n = \operatorname{tg} \varphi = 1$ und $\varphi = 45°$. Dagegen bei turbulenter Strömung nach den Gl. (9b) und (5) bzw. (7) ist sie $q = C_2 \cdot \sqrt{p}$, somit $n = \operatorname{tg} \varphi = 0{,}5$ und $\varphi = 26°\ 30'$. Die eine oder die andere dieser beiden Geraden ist durch die in Abb. 6 aufgetragenen Punktreihen als Ausgleichslinie hindurchgelegt worden. Diese Geraden sind dick gezeichnet. Die schwarzen Punkte entsprechen den Versuchen ohne Nuten, die weißen denen mit Nuten. Der Maßstab für die Durchflußmengen in Abb. 6 ist beim 0,01 mm-Spalt ein besonderer und unmittelbar durch deren Ausgleichgerade gestrichelt durchgezeichnet; er ist 100mal größer gewählt als der für die übrigen Spalte.

Die Strömung teils laminar, teils turbulent. — Die Ausgleichgeraden in Abb. 6 haben bei den Spaltweiten 1,0 — 0,6 — 0,4 mm durchweg die Neigung 1 : 2, die Strömung war also bei diesen Spalten ohne sowohl wie mit Nuten turbulent; dagegen bei den Spaltweiten 0,175 — 0,1 — 0,01 mm ist der Neigungswinkel 45°, die Strömung war also laminar. Beim 0,25 mm-Spalt kreuzen sich die Ausgleichgeraden der schwarzen und der weißen Punktreihe

sehr deutlich. Unterhalb der Kreuzung geht die Ausgleichkurve für den Spalt mit Nuten offenbar in eine 45°-Gerade über, d. h. bis zu etwa 1 *at* Druck erfolgte die Strömung im 0,25 mm-Spalt auch mit Nuten laminar, doch hat sie bei 2 *at* Druck bereits die Neigung 1:2; hier war also die Strömung turbulent. Zwischen diesen beiden Geraden liegt ein Kurvenstück, das einen Übergangszustand kennzeichnet. Ohne Nuten zeigt dieser Spalt im ganzen Bereich laminare Strömung. Übergangsstücke sind auch bei den Versuchsreihen 0,175 — 0,4 und 0,6 mm zu erkennen. Die Kreuzungspunkte liegen offenbar alle auf einer gemeinsamen Parallelen zur p-Achse, die in Abb. 6 strichpunktiert gezeichnet ist und die Ordinate $q_0 = 13{,}2$ kg/min hat.

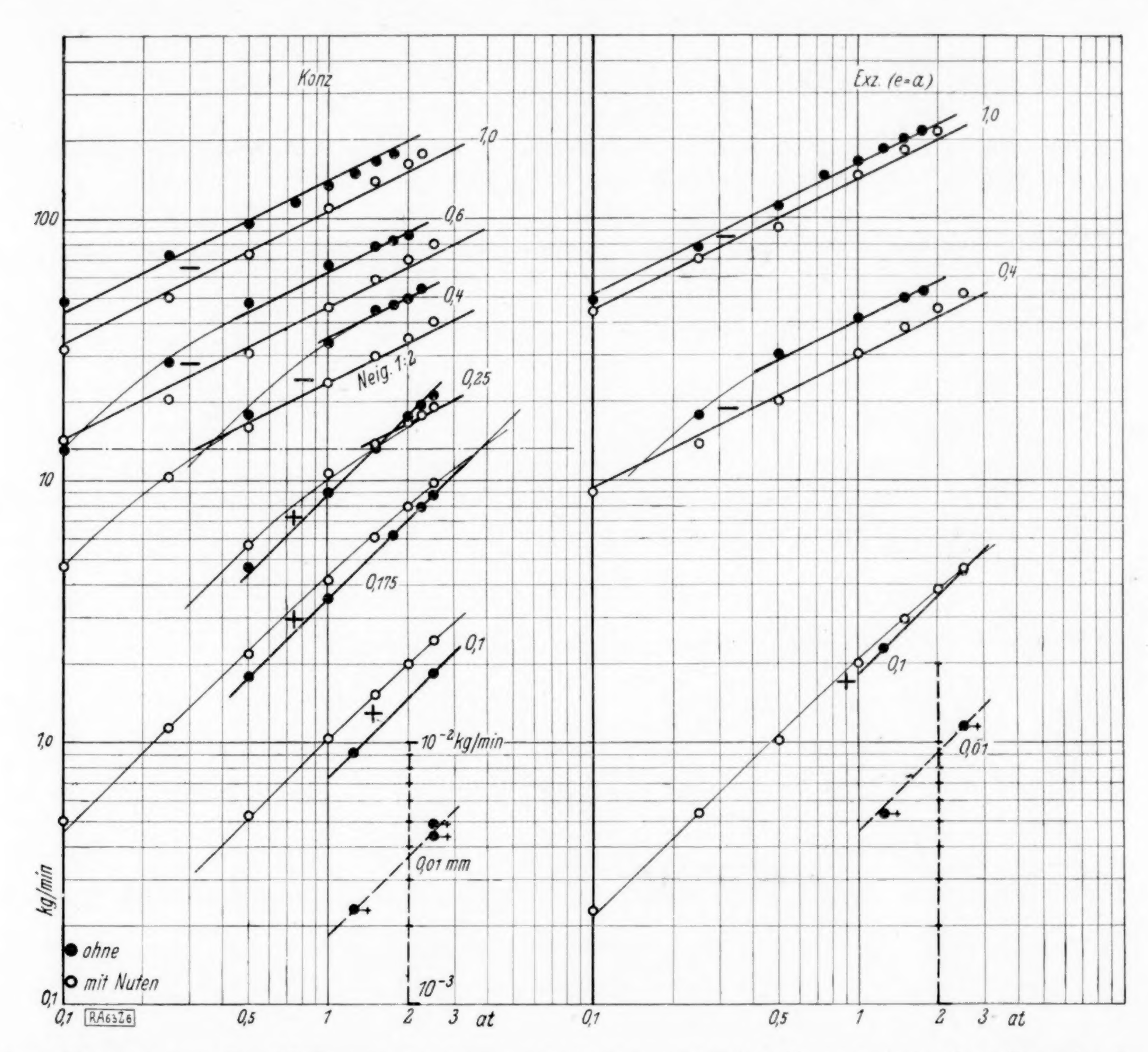


Abb. 6. Die gewogenen Durchflußmengen bei konzentrischen und bei vollexzentrischen Drosselspalten von 0,01 bis 1,0 mm Spaltweite für Drosselungen zwischen $(p_1 - p_2) = 0{,}1$ und 3 *at*; unter Lage der Meßöffnungen p_1 und p_2 bei $\varphi = 90°$.

Die Ringnuten teils schädlich, teils nützlich. — Die Vermehrung der Durchflußmenge infolge von Nuten ist in Abb. 6 durch ein Pluszeichen, die Verringerung durch ein Minuszeichen im Felde zwischen den Ausgleichlinien hervorgehoben, und man erkennt in der linken Hälfte von Abb. 6 deutlich, daß es für jede Spaltweite eine gewisse Druckhöhe und demgemäß eine gewisse Durchflußmenge gibt, bei der der Einfluß von Nuten null ist, unterhalb der die Durchflußmenge infolge von Quernuten vermehrt und oberhalb der sie verringert wird.

Die Grenz-Durchflußmenge. — Die jenen Geschwindigkeiten entsprechende Durchflußmenge q_0 ist bei allen Spalten gleich groß, nämlich 13,2 kg/min beim Spalt Abb. 1 von rd. 250 mm Umfang oder $13{,}2 : 25 = 0{,}53$ kg/min je cm Umfang für Spalte von beliebigem Durchmesser.

Abb. 6 gestattet, mit einem logarithmischen Maßstab unmittelbar abzulesen, wieviel kg Wasser im Falle von Nuten mehr oder weniger durchflossen. Bei 1 *at* Druck flossen beim 1,0 mm-Spalt mit Nuten nur 106 kg/min statt 140 aus, das sind 24,3 vH weniger, dagegen beim 0,1 mm-Spalt 1,03 statt 0,74, das sind 39,2 vH mehr. Die nach Gl. (9a) und (1) berechneten theoretischen Durchflußmengen, beispielsweise $q_k = 9{,}15$ kg/min beim 0,25 mm-Spalt für 1 *at* und $\eta = 1{,}20 \cdot 10^{-4}$ bei 13,6° C — gemessen war 8,96 kg/min — sind zutreffende.

6. Der konzentrische Drosselspalt mit und ohne Nuten.

Die Widerstandsziffer und die Reynoldssche Zahl beim konzentrischen Spalt. — In Abb. 7 sind für die konzentrischen Spalte die Werte log λ als Funktion von log R aufgetragen worden. Zu diesem Zwecke wurde aus der minutlichen Durchflußmenge und dem zugehörigen Spaltquerschnitt die mittlere Durchflußgeschwindigkeit v_m berechnet und hiermit nach Gl. (4) der Wert λ, einerlei ob die Strömung, wie bei Gl. (4) vorausgesetzt ist, turbulent oder aber laminar war. Da aber für letztere die Gl. (1) gilt, so müssen sich bei der Berechnung von λ-Werten nach der Gl. (4) für den Fall der laminaren Strömung die aus der Gleichsetzung von (1) und (4) folgenden Werte λ_{lam} ergeben:

$$p = \frac{12\,\eta\, l}{a^2} \cdot v_m = \lambda \cdot \frac{l}{2\,a} \cdot \gamma \cdot \frac{v_m^2}{2\,g}, \qquad \lambda_{\text{lam}} = \frac{48\, g\, \eta}{v_m\, a\, \gamma} = \frac{48}{R} = 48\, R^{-1}.$$

Diese Kurve ist in Abb. 7 eingezeichnet, sie ergibt in der logarithmischen Darstellung eine Gerade, die ($\operatorname{tg}\varphi = -1$) unter 45^0 abfällt und für $R = 1$ den Wert $\lambda = 48$ zeigt.

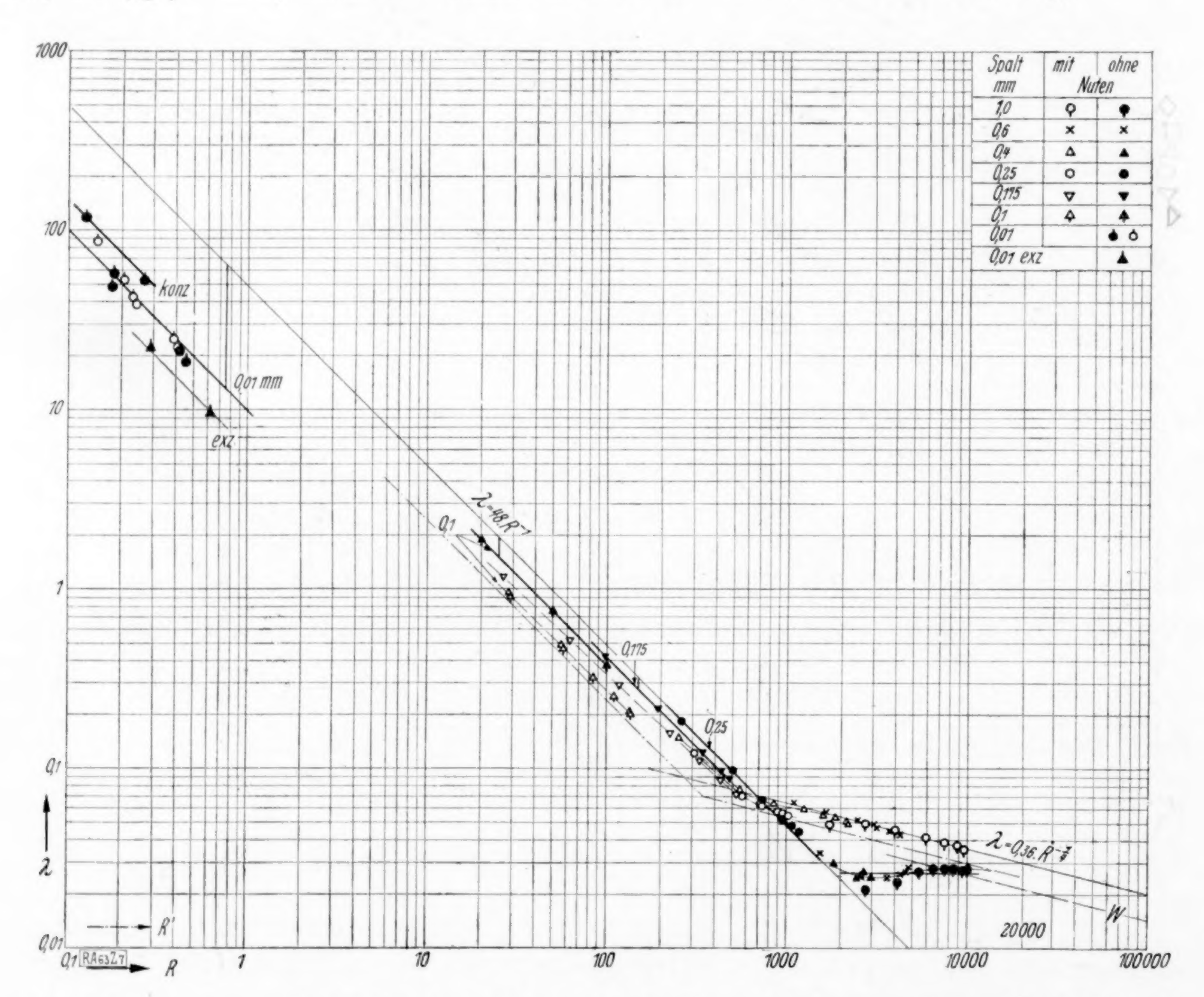


Abb. 7. $\lambda = f(R)$ bei laminarer und bei turbulenter Strömung in konzentrischen Drosselspalten von 1,0 – 0,6 – 0,4 – 0,25 – 0,175 und 0,1 mm Spaltweite, ohne Nuten (schwarze Punkte) und mit Nuten (weiße Punkte). Desgleichen bei laminarer Strömung im Spalt von 0,01 mm Spaltweite ohne Nuten bei Kon- und bei Exzentrizität.

In Abb. 7 sind bis auf eine Ausnahme alle Versuche ohne Nuten durch schwarze Punktzeichen, die mit Nuten durch weiße angegeben; nur beim 0,01 mm-Spalt bedeuten die schwarzen und die weißen Zeichen Versuche ohne Nuten; die runden schwarzen sind hier *Eu*-, die weißen *Wu*-Versuche, und die dreieckigen schwarzen Punkte sind Versuche mit vollexzentrischem Spalt. Die Zeichen sind auf der Abbildung sämtlich erläutert.

Betrachtet man die Punktreihen, die in der Nähe der Geraden $\lambda = 48 \cdot R^{-1}$ links von ihr liegen, so sind das die der Spalte 0,25 — 0,175 — 0,1 und 0,01 mm. Bei jedem derselben sind sie für Versuche ohne Nuten durch eine gemeinsame kräftige 45^0-Gerade verbunden und ausgeglichen.

Einfluß der geringen *ungleichen* Neigung der Kegelflächen. — Die Punkte der Versuche mit 0,25 mm Spaltweite liegen genau auf der theoretischen Linie $\lambda = 48 \cdot R^{-1}$. Die andern Ausgleichgeraden liegen sämtlich darunter. Letzteres erklärt sich daraus, daß die kegeligen Flächen der Hülse und des Kegels nicht genau gleiche Neigung beim Schleifen in der Fabrik bekommen hatten. Die Spaltweite nahm mit größerwerdendem Durchmesser zu;

in der Schlußlage war die Spaltweite am engen Ende 0, am weiten aber noch a_0, in halber Länge des Spaltes also 0,5 a_0. Die durch die Länge der axialen Verschiebung des Innenkegels bestimmten Spaltweiten a können daher nur als Nennweiten gelten; für die Ausrechnung aus den Versuchen hätte die mittlere wirkliche Spaltweite in halber Länge des Spaltes $a' = a + 0{,}5\ a_0$ benutzt werden müssen. Dann würden die Werte λ aus den Versuchen bei allen Spaltweiten auf der theoretischen Geraden $\lambda = 48 \cdot R^{-1}$ liegen, wie die folgende Rechnung beweist. Die Ordinaten in Abb. 7 sind nach Gl. (4) errechnet als $\lambda = p \cdot \frac{4\,a\,g}{l\,\gamma\,v_m^2}$. Sie hätten aber berechnet werden sollen mit a' und v_m', dann hätten sich Werte λ' ergeben, die auf der theoretischen Geraden liegen:

$$\lambda' = p \cdot \frac{4\,a'\,g}{l\,\gamma\,v_m'^2}.$$

Das Verhältnis beider ist

$$\lambda' : \lambda = \frac{a'}{a} \cdot \left(\frac{v_m}{v_m'}\right)^2.$$

Bei einem und demselben R gilt für v_m und v_m' die Gleichung

$$R = v_m \cdot \frac{a\,\gamma}{g\,\eta} = v_m' \cdot \frac{a'\,\gamma}{g\,\eta} \quad \text{oder} \quad v_m : v_m' = a' : a\,.$$

Hiermit wird

$$\lambda' : \lambda = \left(\frac{a'}{a}\right)^2 \quad \text{und} \quad a' : a = \left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^{1/3}.$$

Wirkliche Spaltweite und Nennweite. — In der folgenden Zusammenstellung ist hiernach berechnet, wieviel die wirkliche Spaltweite a' bei den verschiedenen Spaltweiten größer war als die entsprechende Nennweite a. Dazu sind die Werte λ' und λ bei gleichem R aus Abb. 7 abgegriffen.

Nennwerte a	R	λ'	λ	$\lambda':\lambda$	$a':a$	$0{,}5\ a_0 = (a' - a)$	Mittlere wirkliche Spaltweite $a' = a + 0{,}5\ a_0$
0,25	400	0,121	0,121	1	1	0	0,25
0,175	200	0,24	0,208	1,154	1,049	0,00857	0,183
0,1	50	0,97	0,75	1,294	1,09	0,009	0,108
0,01	0,2625	184	37,8	4,87	1,695	0,007	0,017
						im Mittel 0,00819	

Die Tabelle zeigt, daß die geringe Ungleichheit der kegeligen Flächen noch nicht bei 0,25 mm Spaltweite, dagegen bei den kleineren Spaltweiten spürbaren Einfluß hatte, und sie beweist, daß die Werte λ sämtlich genau auf der theoretischen Geraden $\lambda = 48 \cdot R^{-1}$ liegen, wenn man ihre Ausrechnung aus den Versuchsergebnissen nicht mit der Nennweite a, sondern mit der wirklichen, durchweg um rd. 0,008 mm größeren mittleren Spaltweite a' vornimmt. Um diese Übereinstimmung zu kennzeichnen, sind in Abb. 7 die Ausgleichgeraden durch je eine kräftig ausgezogene Senkrechte mit der theoretischen Geraden verbunden worden. Nach der Tastnadel war auf ungefähr 0,01 mm Unterschied geschlossen worden.

Begreifliche Schwierigkeiten bei Untersuchung des 0,01 mm-Spaltes. — Abb. 7 zeigt nun beim Spalt mit der Nennweite 0,01 mm eine Streuung der Punkte um die Ausgleichgerade, wie sie sonst bei keiner anderen Spaltweite vorhanden ist. Als Ursachen für sie können in Betracht gezogen werden:

1. Die unvermeidlichen Fehler beim Zentrieren mittels Tastnadel. Wenn sie auch nur sehr klein sind, können sie doch im Verhältnis zu der sehr engen Spaltweite 0,01 mm beträchtlich sein, und schon bei geringer Exzentrizität des Ringspaltes werden die gemessenen Durchflußmengen größer, die λ-Werte also kleiner sein als die theoretischen bei Voraussetzung genauer Konzentrizität. Aber die Einstellung des Spaltes ist während dieser Versuche ungeändert gelassen worden, daher könnten die Versuchspunkte zwar gleichmäßig tiefer liegen, nicht aber auch noch streuen.

2. Die Schwierigkeit, den Beharrungszustand so vollkommen zu erreichen, daß die winzigen Ausflußmengen sicher gemessen werden können. An dem Staugefäß unter dem Spaltaustritt muß das Wasser an der Außenfläche herablaufen und beim 0,01 mm-Spalt mit nur etwa 5 bis 8 Tropfen je Minute gebraucht es sehr lange Zeit, bis der Überlaufspiegel sich genau eingestellt hat, der Wasserbeschlag auf dem Mantel des Gefäßes dauernd in gleichem Maße haftet und nur die 5 bis 8 Tropfen herabrinnen. Die Durchflußmenge rutschte dann

weiter durch einen Trichter und eine mehrere Meter lange, unter 30° geneigte Rinne in das Auffanggefäß, das beim 0,01 mm-Spalt eine Flasche war. Das Wasser lief zwar bald und dauernd gleichmäßig, wenn anfangs ein Wasserüberschuß durch die Rinne geleitet wurde, so daß die geringe Durchflußmenge von wenigen Tropfen nicht erst zur Benetzung der Rinne dienen mußte. Nachdem der Tropfenfall an der Flasche sehr lange Zeit deutlich gleichmäßig gewesen war, wurde Beharrungszustand angenommen. Diese Wartezeit wurde bis zu 5/4 Stunden ausgedehnt. Aber da am Staugefäß und der Rinne jede Erschütterung peinlichst vermieden werden mußte, damit die Rinnbewegung nicht beeinflußt wurde, so konnte die Messung dieser geringen Durchflußmengen zweifellos sehr leicht fehlerhaft werden.

3. Die Möglichkeit, daß infolge der Feuchtigkeit der Luft in der Meßgrube der Maschinen halle an der vielleicht 5° C kühleren Eimeroberfläche eine immerhin schon beträchtliche Bildung von Tropfen stattgefunden hat. Beobachtungen hierüber sind nicht gemacht worden.

Durch Nuten schwach turbulent erregte laminare Strömung. — Weiter sind in Abb. 7 im laminaren Gebiet auch die Versuche mit Nuten bei Spaltweite 0,175 und 0,1 mm durch je eine Ausgleichgerade (dünn gestrichelt gezeichnet) zusammengefaßt und auf eine kleinere Strecke auch die bei Spaltweite 0,25 und 0,4 mm. Diese Geraden sind nicht genau parallel zur 45°-Linie wie diejenigen bei den Versuchen ohne Nut. Sie sind alle etwas nach links gedreht. Diese Abweichung ist am größten beim 0,4 mm-Spalt und nimmt dann ungefähr wie die Spaltweiten ab. Bedenkt man, daß im turbulenten Gebiet die Ausgleichgeraden noch mehr zur wagerechten Lage hingedreht liegen, so kann man in der Linksabweichung der Versuche mit Nuten ein Anzeichen dafür sehen, daß die laminare Strömung an den Quernuten gestört und in schwachem Maße turbulent erregt ist. Diese Störung ist augenscheinlich um so größer, je weiter der Spalt ist, denn die Ausgleichgerade weicht bei 0,25 mm Spaltweite stärker als bei 0,175 und diese wiederum stärker als bei 0,1 mm Spaltweite von der 45°-Lage ab.

Kürzung der Spaltlänge infolge der Nuten. — Vergleicht man die Beträge λ_1 und λ_2, welche die Widerstandszahl im laminaren Gebiet bei verschiedenen Spalten ohne und mit Nuten paarweise beim selben R hat, so findet man, wie die folgende Aufstellung zeigt, als Verhältnis $\lambda_2 : \lambda_1$ im Mittel 0,777.

a	R	λ_1	λ_2	$\lambda_2 : \lambda_1$	Im Mittel
0,1	60	0,628	0,452	0,72	0,777
0,175	200	0,217	0,176	0,81	
0,25	400	0,12	0,096	0,80	

Fast genau denselben Wert hat das Verhältnis der um die Summe der Nuten gekürzten Spaltlänge l_2 zur ursprünglichen l_1. Die Nuten waren nicht ganz genau 5 mm breit geworden, sondern die Schablone mit diesem Maß, die bei der Herstellung benutzt wurde, hatte in jeder Nut reichliches Spiel. Die wirkliche Nutbreite war rd. 5,5 mm. Die Länge l_2 war also $(181{,}5 - 7 \cdot 5{,}5) = 143$ mm und daher das Verhältnis $l_2 : l_1 = 143 : 181{,}5 = 0{,}788$. Aus dieser Übereinstimmung beider Quotienten ist zu folgern, daß bei laminarer Strömung Quernuten den Durchflußwiderstand in demselben Maße verringern, wie sie die Spaltlänge um die Summe der Nutbreiten kürzen.

$\lambda = f(R)$ im turbulenten Gebiet bei Konzentrizität. — Im turbulenten Gebiet in Abb. 7 sind die Versuche mit konzentrischen Spalten mit Nut durch eine Gerade mit Gefälle 1 : 4 und der Ordinate $\lambda = 0{,}36$ für $R = 1$ bzw. 0,036 für $R = 10000$ ausgewertet. Ihre Gleichung heißt also $\lambda = 0{,}36 \cdot R^{-1/4}$.

Vergleich mit $\lambda = f(R)$ für Rohre. — Sie hat dasselbe Gefälle wie die von Blasius für glatte Rohrleitungen gefundene λ-Gerade. Blasius hat in der Reynoldsschen Zahl als Länge den Rohrdurchmesser d eingesetzt und hiermit die Gleichung $\lambda = 0{,}316 \cdot R^{-1/4}$ gefunden. Mit dem Profilradius $r' = d/4$ als Länge ist hiernach für glatte Rohre:

$$\lambda = 0{,}316 \cdot \left(\frac{v_m \cdot d \cdot \gamma}{4\, g\, \eta}\right)^{-1/4} \cdot 4^{-1/4} = \frac{0{,}316}{\sqrt[4]{4}} \cdot R'^{-1/4} = 0{,}223 \cdot R'^{-1/4}.$$

Für genutete konzentrische Ringspalte mit $r' = \frac{a}{2}$ statt a in der Reynoldsschen Zahl gibt

$$\lambda = 0{,}36 \cdot \left(\frac{v_m \cdot a \cdot \gamma}{2\, g\, \eta}\right)^{-1/4} \cdot 2^{-1/4} = \frac{0{,}36}{\sqrt[4]{2}} \cdot R'^{-1/4} = 0{,}303 \cdot R'^{-1/4}.$$

Das λ bei glatten Rohrleitungen ist also kleiner als bei glatten Spalten mit Nuten, der Grund dafür ist nicht nur die wirbelerregende Wirkung der Nuten, sondern auch, daß die Flüssig-

keit im Spalt von außen und von innen unter dem Einfluß von Wandflächen ist. Denn auch für die laminare Strömung im Spalt ohne Nuten besteht solcher Unterschied, hier ist für Rohrleitungen $\lambda = 16 \cdot R'^{-1}$ und für konzentrische Spalte ohne Nuten $\lambda = 24 \cdot R'^{-1}$.

Die den auf R' bezogenen λ-Gleichungen entsprechenden Geraden in der logarithmischen Darstellung sind in Abb. 7 dünn strichpunkt eingezeichnet. Sie unterscheiden sich von den ursprünglichen, dick gezeichneten, auf R bezogenen Geraden lediglich dadurch, daß sie um die Länge (log 2 — log 1) wagerecht nach links verschoben sind.

Nutzen der Nuten im turbulenten Gebiet. — Im turbulenten Gebiet sieht man noch in Abb. 7, daß Nuten die Widerstandszahl λ von $R = 700$ ab aufwärts erhöhen, wogegen beim Spalt ohne Nuten noch bis zu etwa $R = 1100$ oder $R' = 550$ die Strömung annähernd laminar bleibt. Letzteres ist die kritische Reynoldssche Zahl für Ringspalte ohne Nuten. Becker hat genau denselben Wert für R' bei konzentrischen Ringspalten und Schiller den Wert $R' = 580$ bei glatten Metallrohren gefunden. Unterhalb dieses Wertes ist vorkommende Turbulenz nicht von Bestand. Die von $R = 1100$ ab folgende schwache Bogenlinie, auf welcher weiter die λ-Werte ohne Nuten liegen, stellt eine Übergangskurve von den rein laminaren zu den rein turbulenten Werten des Widerstandes vor, wie sie sich nach Schiller auch in glatten Rohren einstellt, wenn die Meßstelle nahe am Einlauf liegt und kleine, Turbulenz erregende Störungen am Eintritt vorhanden sind. Die Bogenlinie geht augenscheinlich erst bei sehr großen Werten R in die gezeichnete Schräglage 1 : 4 über, die offenbar gänzlich schichtfreier, voll turbulenter Strömung entspricht. Leider war der Wasserdruck nicht groß genug und die Spaltweite des Apparates nicht über 1 mm zu vergrößern, um so große Werte R mit diesem Apparat erreichen zu können. Zwischen $R = 3000$ und 100000 ist in Abb. 7 noch eine zweite Gerade mit der Neigung 1 : 4 dünn gestrichelt eingezeichnet und mit W bezeichnet, die die Versuche mit 1 mm Spaltweite ohne Nut schneidet. Diese Gerade W ist von Winkel[3]) ermittelt an einem 2,5 mm weiten Ringspalt ohne Nuten. Sie entspricht aber nicht der Punktreihe unserer Versuche ohne Nut in Abb. 7, sondern schneidet sie.

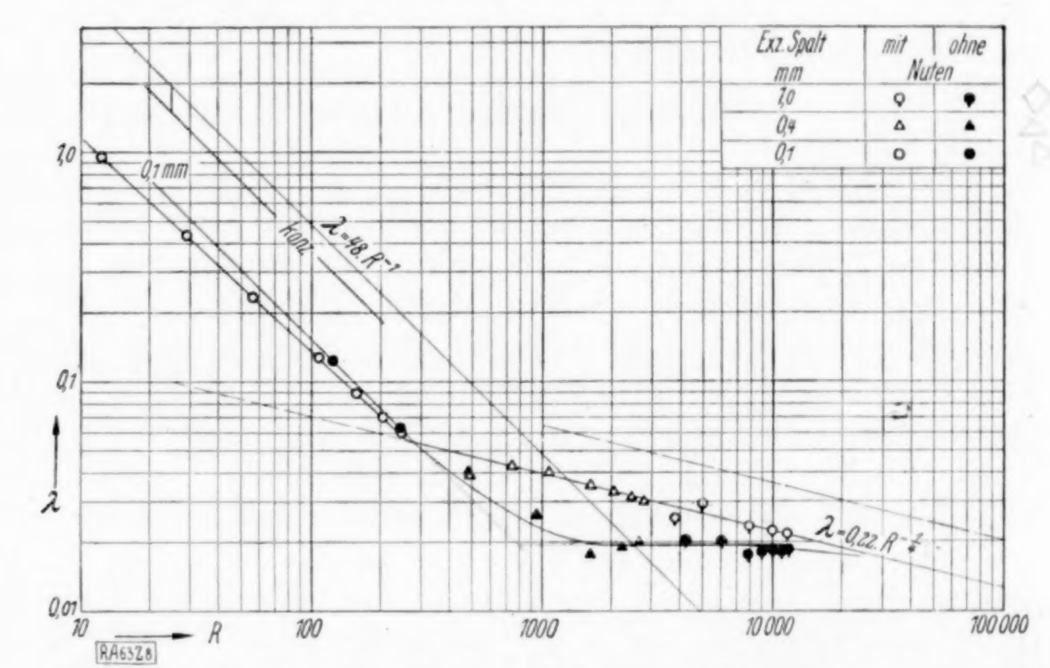


Abb. 8. $\lambda = f(R)$ bei laminarer und bei turbulenter Strömung in exzentrischen Drosselspalten von 1,0 — 0,4 und 0,1 mm Spaltweite, ohne Nuten (schwarze Punkte) und mit Nuten (weiße Punkte).

Nutzen von Nuten verschwindet ganz bei sehr großem R. — Unsere λ-Werte ohne Nuten gehen offenbar bei noch größeren Werten R in die λ-Gerade mit Nuten über. In Abb. 8, wo die Exzenterspaltversuche ausgewertet sind, ist der Anschluß in diesem Sinne fast erreicht. Es wird eben bei sehr großen Durchflußgeschwindigkeiten der wirbelerregende Einfluß der glatten Wandfläche allein schon so stark, daß der Einfluß der Nuten gänzlich zurücktritt. Bei beispielsweise $R = 3000$ ist das λ_2 *mit* Nuten fast genau 2 mal so groß wie das λ_1 *ohne* Nuten, entsprechend einem $\frac{q_1}{q_2} = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = 1{,}414$ oder einer Verringerung der Durchflußmenge um

$$\frac{q_1 - q_2}{q_1} = \left(1 - \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}\right) \cdot 100 = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot 100 \approx 30 \text{ vH}.$$

Bei weiterwachsendem R nimmt das Verhältnis $\lambda_2 : \lambda_1$ ab, bei $R = 10000$ ist es $3{,}6 : 2{,}8 = 1{,}285$ und $\frac{q_1}{q_2} = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = \sqrt{1{,}285} = 1{,}13$. Bei sehr großen Werten R wird das Verhältnis $\lambda_2 : \lambda_1 = 1$. Mit diesem Wert begann es auch bei $R = 700$. In dem Gebiet $R = 700$ bis 20000, höchstens 30000, sind daher Nuten bei Konzentrizität des Spaltes von beachtlichem Nutzen. Für die praktische Anwendung ist noch zu betonen, daß die benutzte Nutenanordnung bei allen Spaltweiten im Längsschnitt die Profilmaße $(\perp 5 \times 5{,}5) + 19{,}5$ oder rd. $(\perp 5 \times 5) + 20$ hatte und die hiermit gefundenen λ-Werte unter Voraussetzung geometrischer und hydrodynamischer Ähnlichkeit auch für abgeleitete Nutenspalte mit anderem Profil im Längsschnitt gelten. So gelten

[3]) Z. f. angew. Math. u. Mech., Bd. 3, 1923, S. 251.

die in Abb. 7 bei $R = 700 - 500 - 100$ abgelesenen λ-Werte $0{,}07 - 0{,}074 - 0{,}270$ der Versuchsspalte $0{,}25 - 0{,}175 - 0{,}1$ bei denselben R-Werten auch für die durch 2,5fache Verkleinerung erhaltenen Spalte $0{,}1 - 0{,}07 - 0{,}04$ mm mit dem Profil $(\perp 2 \times 2) + 8$.

Entlüftung der Nuten. — Die Luft aus den Nuten des Apparates, der stets lotrecht benutzt worden ist, wurde von dem durch den Spalt strömenden Wasser selbsttätig abgeführt. Denn Gegenversuche, bei denen nach Inbetriebsetzung aus jeder Nut durch eine 3 mm weite verschraubbare seitliche Öffnung alle etwa vorhandene Luft austreten konnte, zeigten genau dieselben Ausflußmengen, sowohl im laminaren als auch im turbulenten Gebiet.

Die kritische Reynoldssche Zahl. — Als solche kann man bei den Spalten mit Nuten $R_{kr} = 700$ bzw. $R_{kr}' = 350$ am Knick der Geraden für λ_{lam} und λ_{turb} ansehen. Berechnet man die Durchflußmenge, die dieser Grenze entspricht, nach Gl. (9a), so ist sie mit

$$R_{kr}' = \frac{v_m \cdot a \cdot \gamma}{2\, g\, \eta} = 350$$

$q_{kr} = 6 \cdot 10^4 \cdot \pi \cdot D_m \cdot a \cdot v_m = 13{,}1$ kg/min, also mit dem in Abb. 6 ermittelten $q_0 = 13{,}2$ kg/min in sehr guter Übereinstimmung.

7. Der exzentrische Drosselspalt mit und ohne Nuten.

$\lambda = f(R)$ bei Exzentrizität. — In Abb. 8 sind die bei den exzentrischen Spalten gefundenen λ-Werte zusammengestellt. Die Meßstellen waren bei diesen Spalten in die Mitte zwischen Spaltmaximum und -minimum gelegt, wo die Spaltweite praktisch gleich der konzentrischen Spaltweite war und der Winkel φ in Abb. 9 gleich 90° ist. An dieser Stelle werden ja in der Anlaufstrecke des Spaltes vom obersten Rand bis zur Meßstelle p_1 die hydrodynamischen Verhältnisse und der Druckabfall praktisch dieselben sein wie bei gleichweitem konzentrischen Spalt, falls nicht durch die Unsymmetrie der lichten Weite des exzentrischen Spaltes die hydrodynamischen Verhältnisse verändert werden. Es war also erwünscht, festzustellen, ob sich solcher Einfluß bei der gewählten 90°-Lage bemerkbar machte.

Einfluß der Lage der Meßstellen bei Exzentrizität. — Zu diesem Zweck wurde durch geeignete Vorstellung des Kegels das Meßstellenpaar, also ein und dieselben zwei Meßöffnungen, nacheinander in die Lage $\varphi = 90^\circ$, 45° und 135°, gemessen vom Spaltminimum her, eingestellt und jedesmal bei $(p_1 - p_2) = 1{,}25$ und $2{,}5$ *at* die Durchflußmenge gemessen. Die erhaltenen q_e-Werte sind in Abb. 9 polar aufgetragen und durch die stark ausgezogenen Kurven ergänzt. Sie waren bei 45° und 90° gleich groß, bei 135° dagegen bei beiden Drücken um rd. 12 vH kleiner. Erwartet worden war, daß sie mit zunehmendem φ größer würden. Wegen des gegenteiligen Befundes wurden diese Versuche wiederholt sehr genau geprüft, wie sich schon daran zeigte, daß mehrfache Beobachtungen bei $\varphi = 90^\circ$ und 135° in Abb. 9 alle in einem Punkt zusammenfallen.

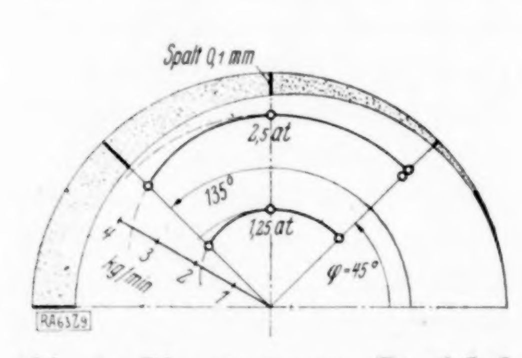


Abb. 9. Die gewogenen Durchflußmengen im vollexzentrischen 0,1 mm-Spalt, je nachdem ob $(p_1 - p_2) = 2{,}5$ oder 1,25 *at*, mit demselben Paar Meßöffnungen, bei $\varphi = 45^\circ$ oder 90° oder aber 135° gemessen wurde. Die Spitze des Winkels φ liegt hierbei, gegen Abb. 4 um $0{,}5\,e$ nach links verschoben, im Mittelpunkt des Spaltmantels.

Die Äquipotentialflächen im Exzenterspalt. — Es ist also außer Zweifel, daß die Durchflußmenge mit demselben Druckgefälle $(p_1 - p_2)$ bei $\varphi = 135^\circ$ kleiner ist als diejenige mit demselben Druckgefälle bei 90° oder 45°. Das läßt sich nur erklären, wenn man sich von der Vorstellung freimacht, daß das Druckgefälle (der Druckgradient) im exzentrischen Ringspalt ringsum gleich ist oder die Äquipotentialflächen in der Strömung auch im exzentrischen Spalt zur Achse senkrechte Ebenen seien. Das hat Becker bei der Herleitung der Gl. (2) und (6) für die exzentrische Durchflußmenge ohne weiteres vorausgesetzt. Diese Voraussetzung hat unbedingt den Vorzug, daß die Rechnung einfache Form behält, aber das folgende zeigt, daß sie nicht ganz zutrifft.

Der Durchfluß im exzentrischen 0,1 mm-Spalt ist, wie in Abb. 8 zu erkennen ist, laminar erfolgt, und da hierbei die Durchflußmenge q_e der mittleren Ausflußgeschwindigkeit c_m und diese nach Gl. (2) dem Druckgefälle $p = (p_1 - p_2)$ proportional ist, so folgt aus der Veränderlichkeit der Durchflußmenge in Abb. 9 unbedingt, daß der Druckabfall $(p_1 - p_2)$ im exzentrischen Spalt nicht ringsum überall gleich ist. Es kann ja doch auch bei $\varphi = 0$, wo die Spaltflächen fest aufeinanderliegen, überhaupt keine Längsströmung und daher auch kein Druckabfall zustande kommen.

Bei $\varphi = 0$ ist stets auch $(p_1 - p_2) = 0$. — Da sich der Spalt auch mit zunehmendem φ in der Nähe von $\varphi = 0$ nur außerordentlich wenig erweitert $(s \approx a - e \cos \varphi)$, so kann auch hier erst die Strömung und der Druckabfall nur sehr gering sein. Ehe man nahe bei $\varphi = 0$ überhaupt einen Druckabfall 2,5 *at* beobachten könnte, fände bereits eine starke

Strömung im weiteren Teile statt, d. h. wenn man dasselbe Druckgefälle in der Nähe des Spaltminimums mißt, wird die gesamte Durchflußmenge größer sein, als wenn man dasselbe Druckgefälle in der Nähe des Spaltmaximums beobachtet. Damit ist der Verlauf der q_e-Kurven in Abb. 9 grundsätzlich erklärt, und wie er sich zahlenmäßig bei den verschiedenen Meßlagen verhält, lehren die Kurven. Daß die unter Voraussetzung ringsum desselben Druckgefälles theoretisch abgeleiteten Formeln für die laminare und turbulente Durchflußmenge im exzentrischen Spalt, wie sich zeigen wird, durch die Versuchsergebnisse bestätigt werden, erklärt sich daraus, daß das mittlere Druckgefälle des exzentrischen Spaltes bei den Versuchen bei $\varphi = 90^0$ gemessen wurde, wo praktisch die hydrodynamischen Verhältnisse ganz dieselben sein müssen wie bei dem ebenso weiten konzentrischen Spalt. Die Form der Äquipotentialflächen restlos aufzuklären, lag nicht im Rahmen des Zwecks dieser Versuche und der verfügbaren Zeit.

Meßöffnungen bei $\varphi = 90^0$ am zweckmäßigsten. — Die Messungen für Abb. 9 sollten lediglich darüber Gewißheit schaffen, daß unvermeidliche kleine Fehler von vielleicht $\pm 5^0$ bei der Einstellung der Meßstellen auf $\varphi = 90^0$ noch keine Unterschiede der Durchflußmenge zur Folge haben, und das zeigt die Abb. 9 deutlich.

In Abb. 8 ist zunächst zu erkennen, daß auch beim exzentrischen 0,1 mm-Spalt mit Nuten die λ-Ausgleichgerade von der 45^0-Lage aus um einen kleinen Winkel nach links abweicht, was — wie schon bei Abb. 7 erläutert — eine wirbelerregende Wirkung der Nuten sogar bei sonst ganz laminarem Strömungsverlauf anzeigt. Die λ_1-Werte für den Spalt ohne Nuten verlaufen dagegen genau unter 45^0. Bei diesem Spalt muß auch die schon früher besprochene Ungleichheit der Neigung der kegeligen Flächen berücksichtigt werden, und deshalb ist links oben in Abb. 8 außer der Geraden $\lambda = 48 \cdot R^{-1}$ für den konzentrischen 0,1 mm-Spalt auch die Ausgleichgerade für den konzentrischen wirklichen Spalt von 0,1 mm Nennweite aus Abb. 7 eingezeichnet worden. Bei $R = 50$ ist deren Ordinate $\lambda_{k_1} = 0{,}75$ und die der Kurve für den exzentrischen Spalt ohne Nuten $\lambda_{e_1} = 0{,}305$. Das Verhältnis beider ist $\frac{\lambda_{k_1}}{\lambda_{e_1}} = \frac{q_{e_1}}{q_{k_1}} = 2{,}46$, d. i. gleich dem theoretischen Werte 2,5 nach Gl. (3). Ebenso ist es bei $R = 200$, wo die Ordinaten 0,186 und 0,076 als Verhältnis 2,45 ergeben.

Versuche mit 0,01 mm-Exzenterspalt. — Um die Abb. 8 nicht auch bis zu $R = 0{,}1$ ausdehnen zu müssen, sind die Exzenterspaltversuche mit 0,01 mm gleich noch in Abb. 7 oben links eingetragen. Dort ist bei $R = 0{,}3$ $\lambda_e = 20{,}5$ und $\lambda_k = 34$ und ihr Verhältnis 1,66. Diese Abweichung vom theoretischen Wert 2,5 ist zweifellos in den Mängeln der Zentrierung und der ungleichen Neigung der kegeligen Flächen begründet. Entnähme man λ_k aber der Verbindungsgeraden der größten der λ_k-Werte in Abb. 7, die mit „konz." bezeichnet ist, so wäre das Verhältnis $50 : 20{,}5 = 2{,}44$ dem theoretischen Werte fast genau gleich. Diese Größtwerte sind übrigens, obgleich es nur zwei sind, vielleicht die genauesten Werte λ_k, da sie aus mit allergrößter Vorsicht durchgeführten Versuchen mit sehr langer Einlaufzeit stammen.

Hingegen verhalten sich die Durchflußmengen der Spalte mit Nuten bei Exzentrizität und Konzentrizität mit laminarer Strömung bei $R = 100$ wie $\lambda_{k_2} : \lambda_{e_2} = 0{,}27 : 0{,}136 \approx 2 : 1$ und bei $R = 30$ wie $0{,}88 : 0{,}415 = 2{,}12 : 1$, also nicht ganz so verschieden wie im Falle ohne Nuten.

Einfluß der Nuten auch bei Exzentrizität des Spaltes. — Die Nuten wirken beim exzentrischen Spalt in demselben Sinne wie beim konzentrischen. Ihre Schädlichkeit im laminaren Gebiet ergibt sich nach Abb. 8 bei $R = 200$ als $q_2 : q_1 = \lambda_1 : \lambda_2 = 0{,}076 : 0{,}071 = 1{,}07$; der Spalt mit Nuten ließ um 7 vH mehr Wasser durch. Im turbulenten Gebiet waren sie zwischen $R = 400$ und 10000, höchstens 11000, von Nutzen, bei $R = 2000$ ließen die exzentrischen Spalte ohne Nuten gemäß $q_1 : q_2 = \sqrt{\lambda_2} : \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{0{,}335} : \sqrt{0{,}196} = \sqrt{1{,}71} = 1{,}31$ d. i. über 30 vH mehr Wasser durchtreten, entsprechend einer Verringerung infolge der Nuten um

$$\frac{q_1 - q_2}{q_1} \cdot 100 = \left(1 - \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}\right) \cdot 100 = \left(1 - \sqrt{\frac{0{,}196}{0{,}335}}\right) \cdot 100 = 23 \text{ vH}.$$

Bei sehr großen Reynoldsschen Zahlen aber werden sie hier ganz deutlich wirkungslos.

Verhältnis der Widerstandsziffern bei Kon- und bei Exzentrizität. — Schließlich sind noch in Abb. 7 und 8 im turbulenten Gebiet durch die Versuche ohne Nuten wagerechte Ausgleichgerade von $R = 2000$ bis 13600 hindurchgelegt. Sie zeigen in Abb. 7 den Wert $\lambda_k = 0{,}026$ und in Abb. 8 $\lambda_e = 0{,}0196$. Ihr Verhältnis ist $m = 1{,}33$ und daher $q_e : q_k = \sqrt{1{,}33} = 1{,}15$. Nach der theoretischen Formel (8) müßte es 1,21 sein. Vergleicht man aber die λ-Werte der Ausgleichgeraden des gesamten turbulenten Gebiets $\lambda_k = 0{,}36 \cdot R^{-1/4}$ aus Abb. 7 und $\lambda_e = 0{,}225 \cdot R^{-1/4}$ aus Abb. 8, so ergibt sich als Verhältnis der Durchflußmengen $q_e : q_k = \sqrt{0{,}336} : \sqrt{0{,}225} = \sqrt{1{,}6} = 1{,}265$ in dem Bereich für $R = 1000$

bis 10000 für Spalte mit Ringnuten und von 10000 ab bis über 100000 hinaus ungefähr auch für Spalte ohne Nuten. Dies bedeutet recht gute Übereinstimmungen der Versuchsergebnisse mit der theoretischen Formel (8), denn die Ausgleichgeraden sind ohne Rücksichtnahme auf diese lediglich durch die Reihen der Versuchspunkte bestimmt worden.

8. Zusammenfassung der Ergebnisse.

Es wurde ein Durchflußapparat mit konzentrisch und exzentrisch einstellbarem Ringspalt konstruiert, der grundsätzlich jede Spaltweite zwischen (konzentrisch gerechnet) 1 und 0 mm einzustellen gestattete und in 200 facher Vergrößerung anzeigte. Spalte von weniger als 0,2 mm und überhaupt exzentrische waren bisher nicht untersucht. Versuche mit Aufhebung der Schwerkraftwirkung im lotrecht benutzten Spalt zeigten, daß der Einfluß der Fallhöhe in ihm unberücksichtigt bleiben konnte und nur bei größerer Spaltweite und sehr geringen Druckhöhen hervortreten würde. Bei laminarer Strömung wird, wenn die Gesamtbaulänge dieselbe bleibt, durch Ringnuten im Spalt die Durchflußmenge stets vergrößert, bei turbulenter aber nur in einem bestimmten Gebiet verringert. Der Wechsel in der Strömung erfolgte beim konzentrischen Spalt ohne Nuten bei $R = 1100$, mit Nuten bei $R = 700$; beim exzentrischen dagegen bei 1000 bzw. 400. Die Verringerung des Durchflusses durch Nuten geschah beim konzentrischen Spalt im Gebiet $R = 700$ bis 20000 (höchstens 30000), beim vollexzentrischen zwischen $R = 400$ bis 10000 (höchstens 11000). Die Vergrößerung im laminaren Gebiet ist umgekehrt verhältnisgleich der Kürzung der Spaltlänge um die Summe der Nutenbreiten. Die Verringerung beträgt bei Form und Zahl der Nuten nach Abb. 3 beim konzentrischen Spalt bis zu 30 vH bei $R = 3000$, beim vollexzentrischen bis zu 23 vH bei $R = 2000$. Die Kurven $\lambda = f(R)$ verlaufen in beiden Fällen so, als ob im turbulenten Gebiet bei sehr großen Reynoldsschen Zahlen, also bei sehr engen Spalten im Falle sehr hoher Drücke, jeder Einfluß der Nuten verschwindet. Liegt daher in der Praxis für einen bestimmten Spalt und Druckabfall die vorauszusehende Reynoldssche Kennziffer R nicht ganz bestimmt und dauernd zwischen etwa $R = 550$ und 15500, so ist es unbedingt besser, ihn ohne Nuten auszuführen; also bei hin- und hergehenden Kolben sollte man niemals Nuten anwenden. Man mache die Drosselspalte so eng wie irgend möglich; ihr Wasserverlust wächst bei laminarer Strömung mit der 3ten, bei turbulenten mit der 1,5ten Potenz der Spaltweite. Es wurde festgestellt, daß der Druckgradient im exzentrischen Spalt in Richtung der Strömung nicht ringsum ein und derselbe ist; die Äquipotentialflächen können bei ihm also nicht wie beim konzentrischen Spalt durchweg zur Achse senkrechte Ebenen sein. Jede Exzentrizität vergrößert die Durchflußmenge und bei voller Exzentrizität fließt im Falle laminarer Strömung ohne Nuten 2,45 und mit Nuten, die selbst in diesem Falle gewissen wirbelerregenden Einfluß haben, nur 2,1 mal soviel durch wie bei Konzentrizität; im Falle turbulenter Strömung dagegen fließt ohne Nuten zwischen $R = 2000$ bis 13500 das 1,15 fache, mit Nuten zwischen $R = 1000$ bis 10000 das 1,26 fache und ohne Nuten zwischen $R = 20000$ und über 100000 hinaus voraussichtlich auch das 1,26 fache durch. Diese Werte sind in ziemlich guter Übereinstimmung mit den theoretisch hergeleiteten Formeln, aus denen sich 2,5 bzw. 1,21 errechnet. Daß rd. 4 vH mehr als das 1,21 fache gemessen wurde, kann möglicherweise durch Querströmungen infolge der Ungleichheit der Äquipotentialflächen im exzentrischen Spalt begründet sein, die aus der schnellen Strömung im weiten Teile Geschwindigkeit auf die langsamere im engen Teile übertragen können. 63

Eingegangen am 15. März 1930.

Über ebene Potentialströmungen durch Gitter.

Von *Friedrich Ringleb* in Jena.

In einer Arbeit über „Potentialströmung durch Gitter" (diese Zeitschrift Bd. 2, 1922) leitet Herr E. König Formeln für die Richtungswinkel ab, welche eine Strömung durch ein Gitter im Unendlichen besitzt, falls sie an den Schaufelkanten des Gitters glatt ein- und abströmt. Im folgenden soll eine elementargeometrische Konstruktion der Richtungswinkel und auf Grund dieser Konstruktion eine andere einfache Herleitung jener Formeln gegeben werden. Zuvor werde, von dem üblichen Wege etwas abweichend, die allgemeine Strömungsfunktion eines Gitters aus ihren Eigenschaften abgeleitet[1]).

[1]) Über die im folgenden als bekannt vorausgesetzten Grundbegriffe der Strömungstheorie vgl. man Riemann-Weber, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, Braunschweig 1927, Bd. 2. S. 762. Über Gitterströmungen und ihre technische Bedeutung vgl. man insbesondere W. Müller, Mathematische Strömungslehre, Berlin 1928; R. Grammel, Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges, Braunschweig 1917; sowie die dort angegebene Literatur.

I.

Unter einem **Gitter** werde die Gesamtheit aller analytischen Kurvenstücke verstanden, die aus einem gegebenen durch Parallelverschiebung um ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$ entstehen, wobei sich nicht zwei Kurvenstücke schneiden mögen (Abb. 1). Jedes Kurvenstück heißt eine Schaufel. Die Endpunkte einer Schaufel nennt man Schaufelkanten. Wird die schlichte z-Ebene längs aller Schaufeln eines Gitters aufgeschlitzt, so entsteht ein unendlich vielfach zusammenhängender Bereich G, den wir als Gitterbereich bezeichnen.

Im Bereiche G wird eine Strömung mittels einer **Strömungsfunktion** $f(z)$ folgendermaßen definiert:

I. $f(z)$ sei im Inneren von G und auf den Schaufeln, abgesehen von den Kanten, regulär und besitze längs jeder Schaufel einen konstanten imaginären Teil.

II. Um das Verhalten von $f(z)$ in einer Kante, z. B. z_1, zu charakterisieren, möge diese durch einen ganz in G verlaufenden Querschnitt von G abgetrennt werden, welcher zwei gegenüberliegende Punkte A, B der Schaufel verbindet und einen einfach zusammenhängenden Bereich $\mathfrak{B}$ begrenzt, der z_1 auf seinem Rande enthält. Wird $\mathfrak{B}$ umkehrbar eindeutig und konform auf das Innere eines Kreises der z'-Ebene abgebildet, was nach dem **Riemann**schen Abbildungssatz möglich ist, und entspricht bei dieser Abbildung dem Punkt z_1 der Punkt z_1', so möge $f(z)$, als Funktion von z' betrachtet, an der Stelle z_1' regulär sein (s. Abb. 2).

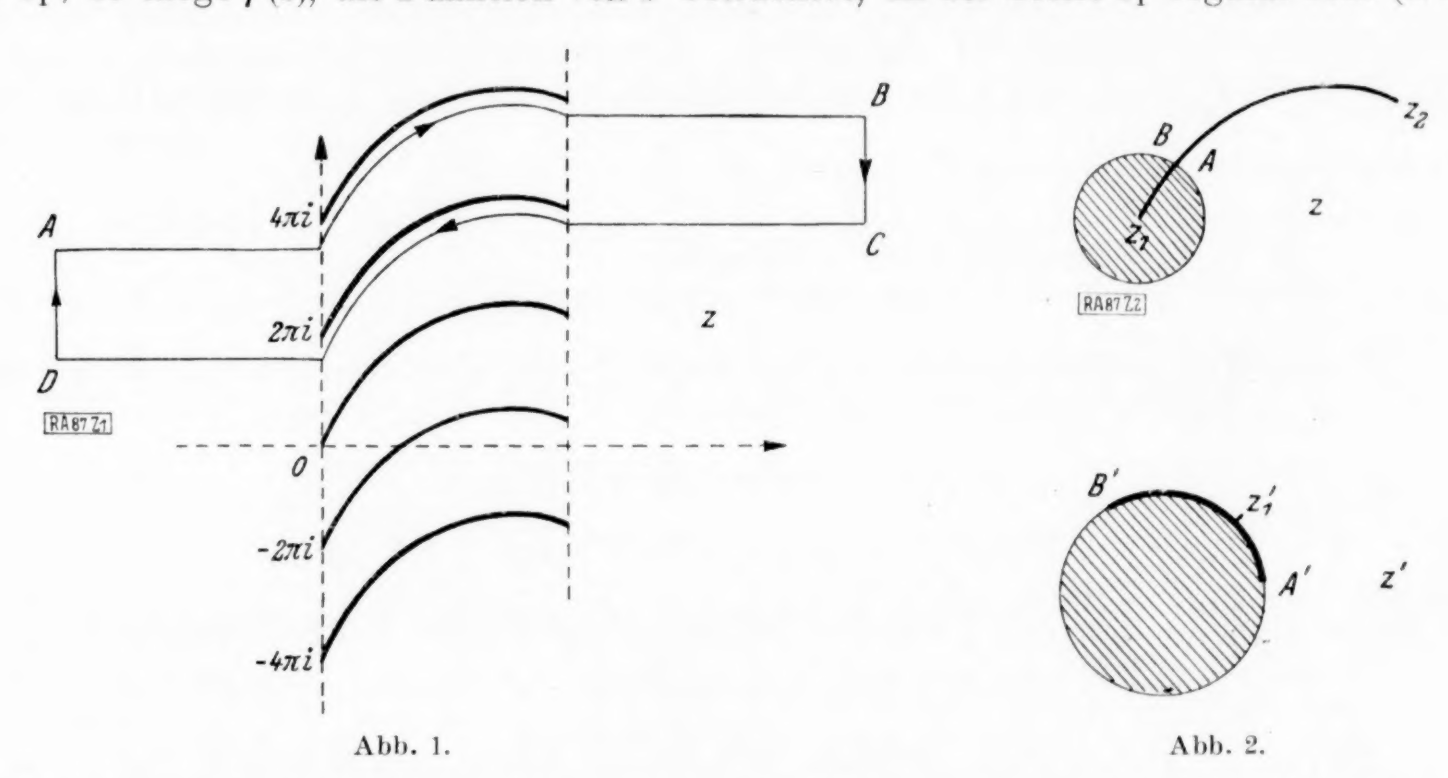


Abb. 1. Abb. 2.

III. Die Geschwindigkeitsfunktion $f'(z)$ sei in G eindeutig und besitze die Periode $2\pi i$.

IV. Liegt die Entfernung des Punktes z von den Begrenzungen des Gitterbereiches oberhalb einer positiven Schranke M, so möge $f'(z)$ beschränkt sein und bei Annäherung an ∞ längs reeller z nicht dem Grenzwert Null zustreben.

V. Die Gesamtquellstärke des Bereiches G sei Null, d. h. das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} f'(z)\,dz,$$

erstreckt über den mit $\mathfrak{C}$ bezeichneten Integrationsweg A, B, C, D, A (Abb. 1), habe den reellen Teil Null. Dabei mögen die kongruenten Kurven AB und CD in Richtung der imaginären Achse den Abstand 2π haben, und die geradlinigen Strecken BC und DA parallel zur imaginären Achse verlaufen.

Zur Bestimmung der im vorhergehenden definierten Strömungsfunktion $f(z)$ werde der Bereich G zunächst der Abbildung

$$t = e^z$$

unterworfen. Der schlichte Bereich G wird dadurch in einen unendlich vielblättrigen Bereich G' übergeführt, dessen Begrenzungen kongruente übereinanderliegende, die Punkte $t_1 = 0$ und $t_2 = \infty$ nicht treffende Schlitze S sind. Das schlicht gedachte Äußere von S werde mittels der Funktion

$$\zeta = \varphi(t)$$

umkehrbar eindeutig und konform auf die obere ζ-Halbebene abgebildet. Die Punkte $t_1 = 0$, $t_2 = \infty$ mögen bzw. in die Punkte β_1, β_2 in der oberen ζ-Halbebene, die Schaufelkanten bzw. in die Punkte α_1, α_2 der reellen ζ-Achse übergehen. α_1 und α_2 können wir uns ohne Beschränkung der Allgemeinheit im Endlichen gelegen denken. Es ist stets $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

Die Funktion $f'(z)=\frac{dw}{dz}$ ist als Funktion von t in der Umgebung von $t_1=0$ und $t_2=\infty$ eindeutig, regulär und beschränkt. Also ist nach einem bekannten Satze der Funktionentheorie $\frac{dw}{dz}$ an den Stellen $t_1=0$ und $t_2=\infty$ selbst regulär, und es gelten dort bzw. die Entwicklungen

$$\frac{dw}{dz}=C_1+C_1'\,t+C_1''\,t^2+\ldots,$$

$$\frac{dw}{dz}=-C_2+\frac{C_2'}{t}+\frac{C_2''}{t^2}+\ldots,$$

wobei nach IV

$$C_1 \neq 0, \quad C_2 \neq 0$$

ist. Die Strömungsfunktion

$$w=\int \frac{dw}{dz}\,dz=\int \frac{dw}{dz}\frac{dz}{dt}\,dt$$

hat daher die Entwicklungen

$$w=C_1 \log t+\mathfrak{P}_1(t),$$

bzw.

$$w=-C_2 \log t+\mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{t}\right),$$

unter $\mathfrak{P}_1(t)$, $\mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{t}\right)$ reguläre Potenzreihen des Arguments verstanden. Bedeutet $\mathfrak{R}$ den reellen Teil, so folgt mit Benutzung von V und III

$$\mathfrak{R}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} f'(z)\,dz\right)=\mathfrak{R}(C_1+C_2)=0.$$

C_1 und C_2 haben also entgegengesetzt gleiche reelle Teile. Die Funktion $t(\zeta)$ besitzt an den Stellen β_1 und β_2 Entwicklungen von der Form

$$t=a_1(\zeta-\beta_1)+a_2(\zeta-\beta_1)^2+\ldots, \quad a_1\neq 0,$$

$$t=\frac{b_{-1}}{\zeta-\beta_2}+b_0+b_1(\zeta-\beta_2)+\ldots, \quad b_{-1}\neq 0,$$

folglich hat w als Funktion von ζ an den Stellen β_1 und β_2 die Entwicklungen

$$w=C_1\log(\zeta-\beta_1)+\mathfrak{Q}_1(\zeta-\beta_1),$$

$$w=C_2\log(\zeta-\beta_2)+\mathfrak{Q}_2(\zeta-\beta_2),$$

wobei $\mathfrak{Q}_1(\zeta-\beta_1)$, $\mathfrak{Q}_2(\zeta-\beta_2)$ gewöhnliche Potenzreihen bedeuten, d. h.

die Strömungsfunktion $w=f(z)$ besitzt als Funktion von ζ an den Stellen β_1 und β_2 Wirbelquellen (speziell Wirbel oder Quellen) mit entgegengesetzt gleicher Ergiebigkeit.

Nach I und II ist w längs der reellen ζ-Achse, auch in a_1 und a_2, regulär und besitzt dort einen konstanten imaginären Teil. Außerdem ist w in der ganzen oberen ζ-Halbebene regulär, abgesehen von β_1 und β_2. Die Funktion $\frac{dw}{d\zeta}$ ist daher in der ganzen oberen ζ-Halbebene, abgesehen von β_1 und β_2, ebenfalls regulär. In β_1 und β_2 besitzt sie Pole 1. Ordnung, deren Residuen entgegengesetzt gleiche reelle Teile haben. Längs der reellen ζ-Achse ist sie regulär und reell. Somit läßt sich $\frac{dw}{d\zeta}$ über die reelle ζ-Achse analytisch fortsetzen und nimmt an konjugiert komplexen Stellen konjugiert komplexe Werte an. Bedeuten $\overline{C}_1$, $\overline{C}_2$, $\overline{\beta}_1$, $\overline{\beta}_2$ die zu C_1, C_2, β_1, β_2 konjugierten Größen, so ist die Funktion

$$\psi(\zeta)=\frac{dw}{d\zeta}-\left(\frac{C_1}{\zeta-\beta_1}+\frac{C_2}{\zeta-\beta_2}+\frac{\overline{C}_1}{\zeta-\overline{\beta}_1}+\frac{\overline{C}_2}{\zeta-\overline{\beta}_2}\right)$$

in der ganzen ζ-Ebene regulär und nach III eindeutig, also eine Konstante. Da $w(\zeta)$ für $\zeta=\infty$ regulär ist, verschwindet $\frac{dw}{d\zeta}$ im Unendlichen. Die Konstante $\psi(\zeta)$ ist daher gleich Null, also gilt

$$w=\int_{\zeta_0}^{\zeta}\left(\frac{C_1}{\zeta-\beta_1}+\frac{C_2}{\zeta-\beta_2}+\frac{\overline{C}_1}{\zeta-\overline{\beta}_1}+\frac{\overline{C}_2}{\zeta-\overline{\beta}_2}\right)d\zeta+c,$$

wobei ζ_0 in der oberen Halbebene oder auf ihrem Rande liegt, und der Integrationsweg in dieser oder auf ihrem Rande unter Vermeidung von β_1 und β_2 zu erstrecken ist. c ist eine Integrationskonstante. Vereinigt man die Brüche unter dem Integral, so erhält man wegen $C_1 + C_2 + \overline{C}_1 + \overline{C}_2 = 0$ die gesuchte Strömungsfunktion in der Form

$$w = \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{l\,\zeta^2 + m\,\zeta + n}{(\zeta - \beta_1)(\zeta - \beta_2)(\zeta - \bar{\beta}_1)(\zeta - \bar{\beta}_2)}\, d\zeta + c \quad \ldots\ldots \quad (1),$$

wobei l, m, n reelle Konstanten sind.

Ist $l \neq 0$, so besitzt die durch $w(\zeta)$ in der ζ-Ebene vermittelte Strömung zwei Staupunkte 1. Ordnung oder einen Staupunkt 2. Ordnung, je nachdem die Wurzeln der Gleichung

$$l\,\zeta^2 + m\,\zeta + n = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

verschieden oder zusammenfallend sind. Sind die Wurzeln reell, so liegen die Staupunkte auf der reellen ζ-Achse. Andernfalls besitzt die Strömung auf der reellen Achse keinen Staupunkt. Da C_1 und C_2 von Null verschieden sind, können die in diesem Falle konjugiert komplexen Wurzeln von (2) nicht mit β_1, $\bar{\beta}_1$ oder β_2, $\bar{\beta}_2$ zusammenfallen. Ist $l = 0$, $m \neq 0$, so liegt ein Staupunkt 1. Ordnung im Endlichen auf der reellen ζ-Achse, während der andere Staupunkt 1. Ordnung im Unendlichen liegt. Schließlich ist im Falle $l = m = 0$, $n \neq 0$ im Unendlichen ein Staupunkt 2. Ordnung gelegen. Der Fall $l = m = n = 0$ ist wegen $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$ unmöglich.

II.

Um zu definieren, wann die Strömung in G glatt heißen soll, muß zunächst gezeigt werden, daß $f'(z) = \frac{dw}{dz}$ in den Schaufelkanten existiert. Als Existenz bezeichnen wir dabei auch den Fall, in dem $f'(z)$ bestimmt unendlich wird. Nach einem bekannten Satze[2]) gelten für die Funktion $\zeta(z)$ in einer Schaufelkante, z. B. in z_1, die Beziehungen

$$\zeta - a_1 = (z - z_1)^{1/2}\,\varphi_0(z),$$
$$\frac{d\zeta}{dz} = (z - z_1)^{-1/2}\,\varphi_1(z),$$

wobei die Funktionen $\varphi_0(z)$ und $\varphi_1(z)$ an der Stelle z_1 stetig und von Null verschieden sind. Da $\frac{dw}{d\zeta}$ an der Stelle a_1 regulär ist, also dort eine Entwicklung von der Form

$$\frac{dw}{d\zeta} = c_0 + c_1(\zeta - a_1) + c_2(\zeta - a_1)^2 + \ldots$$

hat, gilt für $\frac{dw}{dz}$ die Entwicklung

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta}\,\frac{d\zeta}{dz} = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (z - z_1)^{\frac{\nu - 1}{2}}\,\varphi_0^{\nu}(z)\,\varphi_1(z) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Es existiert also $f'(z)$ an der Stelle z_1.

Die durch $f(z)$ in G vermittelte Strömung soll nun glatt heißen, wenn $f'(z)$ an jeder endlichen Stelle z endlich und von Null verschieden ist.

Wegen (3) ist für eine glatte Strömung notwendig, daß

$$c_0 = 0, \quad c_1 \neq 0$$

ist, d. h. die Funktion $w(\zeta)$ liefert in der ζ-Ebene eine Strömung, die an der Stelle a_1 einen Staupunkt 1. Ordnung besitzt. Entsprechendes gilt für a_2. Sind umgekehrt a_1, a_2 Staupunkte 1. Ordnung für die durch $w(\zeta)$ vermittelte Strömung, so ist $\frac{dw}{dz}$ an jeder endlichen Stelle z endlich und von Null verschieden, liefert also eine glatte Strömung in G. Man erkennt leicht, daß die allgemeinste Strömungsfunktion, welche in G eine glatte Strömung liefert, als Funktion von ζ die Gestalt

$$w = l \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{(\zeta - a_1)(\zeta - a_2)}{(\zeta - \beta_1)(\zeta - \beta_2)(\zeta - \bar{\beta}_1)(\zeta - \bar{\beta}_2)}\, d\zeta + c$$

hat, wo $l \neq 0$ eine reelle, c eine im allgemeinen komplexe Konstante bedeutet.

[2]) Vgl. Lichtenstein, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften II C 3, S. 255.

Wir denken uns die obere ζ-Halbebene derart auf sich umkehrbar eindeutig und konform abgebildet, daß α_1 in Null und α_2 in ∞ übergeht. Die Abbildung ist linear und bis auf eine Streckung eindeutig bestimmt. Die Strömungsfunktion nimmt unter Anwendung der bisherigen Bezeichnungen (nach der Transformation) die Gestalt

$$w = l \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{\zeta\, d\zeta}{(\zeta - \beta_1)(\zeta - \beta_2)(\zeta - \bar{\beta}_1)(\zeta - \bar{\beta}_2)} + c$$

an. Da eine Vertauschung von l mit $-l$ lediglich eine Umkehrung der Strömungsrichtung bewirkt, können wir ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit $l > 0$ voraussetzen. Wir beweisen jetzt die Existenz der Grenzwerte

$$\vartheta_1 = \lim_{\zeta \to \beta_1} \operatorname{arc} \frac{dz}{dw}, \qquad \vartheta_2 = \lim_{\zeta \to \beta_2} \operatorname{arc} \frac{dz}{dw}.$$

In der Tat gilt für ϑ_1, da $z(\zeta)$ an der Stelle β_1 die Entwicklung

$$z = \log(\zeta - \beta_1) + \mathfrak{P}_1(\zeta - \beta_1)$$

hat,

$$\vartheta_1 = \lim_{\zeta \to \beta_1} \operatorname{arc} \frac{d\zeta}{dw} \frac{dz}{d\zeta} = \operatorname{arc} \frac{(\beta_1 - \bar{\beta}_1)(\beta_1 - \beta_2)(\beta_1 - \bar{\beta}_2)}{\beta_1}.$$

Ebenso erhält man wegen

$$z = -\log(\zeta - \beta_2) + \mathfrak{P}_2(\zeta - \beta_2)$$

für ϑ_2 den Wert

$$\vartheta_2 = \operatorname{arc} \frac{(\beta_2 - \bar{\beta}_1)(\beta_1 - \beta_2)(\beta_2 - \bar{\beta}_2)}{\beta_2}.$$

ϑ_1 und ϑ_2 sind nur bis auf additive Vielfache von 2π bestimmt. Diese Winkel geben die Richtungen an, denen sich die Strömung anschmiegt, wenn man sich längs einer Normalen zum Gitter in Richtung abnehmender bzw. wachsender Werte von x (für $z = x + iy$) ins Unendliche bewegt. Dabei denkt man sich als positive Richtung der Gitternormalen die Richtung wachsender x. Dann sind ϑ_1 und ϑ_2 die Winkel, um welche man die Gitternormale drehen muß, bis ihre Richtung mit der Richtung der Strömung, d. i. die Richtung wachsender Werte von $u = \mathfrak{R}(w)$, zusammenfällt. Die Winkel werden wie üblich im entgegengesetzten Uhrzeigerdrehsinn positiv gerechnet. Wir nennen ϑ_1 und ϑ_2 kurz die Strömungswinkel.

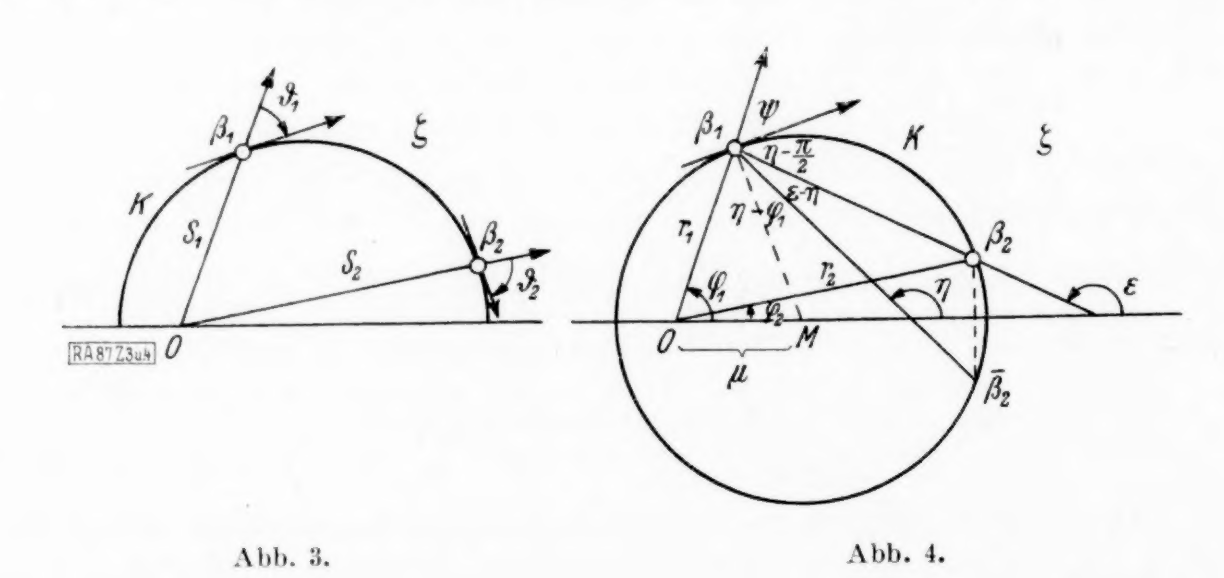


Abb. 3. Abb. 4.

Die Strömungswinkel lassen sich folgendermaßen einfach konstruieren:

Man legt in der oberen ζ-Halbebene den Orthogonalhalbkreis K durch β_1 und β_2 zur reellen Achse und erteilt ihm als positive Richtung die von β_1 nach β_2. Haben β_1 und β_2 denselben reellen Teil, so artet K in eine Halbgerade aus. Den Halbstrahlen S_1 und S_2 von O nach β_1 und β_2 erteilt man als positive Richtungen die nach dem Unendlichen. Dann sind ϑ_1 und ϑ_2 die Winkel, um die man S_1 bzw. S_2 drehen muß, damit sie in die Richtungen der Kreistangenten in β_1 bzw. β_2 oder im Falle der Ausartung von K in die Richtung von K selbst fallen (Abb. 3).

Zum Beweise setzt man

$$\operatorname{arc}(\beta_1 - \beta_2) = \varepsilon, \qquad \operatorname{arc}(\beta_1 - \bar{\beta}_2) = \eta, \qquad \operatorname{arc}\beta_1 = \varphi_1,$$

so daß

$$\vartheta_1 = \frac{\pi}{2} + \varepsilon + \eta - \varphi_1$$

wird, abgesehen von Vielfachen von 2π. Die Winkel ε, η, φ_1 haben die in Abb. 4 angegebene Bedeutung. Wir bestimmen aus dieser Abbildung den dort angegebenen Winkel ψ und erhalten

$$\psi = \frac{3\pi}{2} - \eta - \varepsilon + \varphi_1,$$

also

$$\vartheta_1 = -\psi + 2\pi.$$

Somit ist ϑ_1 abgesehen von Vielfachen von 2π mit ψ identisch, wenn man ψ in der angegebenen Weise positiv oder negativ rechnet. Man überzeugt sich leicht, daß dieses Resultat von der speziellen Wahl der Figur unabhängig ist. Entsprechendes gilt für ϑ_2.

Aus der angegebenen Konstruktion lassen sich jetzt leicht die von Herrn E. König hergeleiteten Formeln für $\operatorname{tg}\vartheta_1$ und $\operatorname{tg}\vartheta_2$ gewinnen. Es seien r_1, φ_1; r_2, φ_2 die Polarkoordinaten von β_1 und β_2 (Abb. 4). Die Abszisse des Orthogonalkreismittelpunktes M ist

$$\mu = \frac{r_1^2 - r_2^2}{2(r_1\cos\varphi_1 - r_2\cos\varphi_2)}.$$

Aus dem Dreieck (O, M, β_1) erhält man mit Hilfe des Sinussatzes unter Beachtung des Vorzeichens von ϑ_1 die Gleichung

$$\frac{\cos(\varphi_1 + \vartheta_1)}{\cos\vartheta_1} = \frac{r_1}{\mu},$$

aus der sich durch einfache Umrechnung

$$\operatorname{tg}\vartheta_1 = \frac{2\cos\varphi_2 - \left(\frac{r_1}{r_2} + \frac{r_2}{r_1}\right)\cos\varphi_1}{\left(\frac{r_1}{r_2} - \frac{r_2}{r_1}\right)\sin\varphi_1}$$

ergibt. In entsprechender Weise findet man

$$\operatorname{tg}\vartheta_2 = \frac{2\cos\varphi_1 - \left(\frac{r_2}{r_1} + \frac{r_1}{r_2}\right)\cos\varphi_2}{\left(\frac{r_2}{r_1} - \frac{r_1}{r_2}\right)\sin\varphi_2}.$$

87

Über den Temperaturverlauf in einem Zylinder von endlicher Länge beim Abkühlen und Erwärmen.

Von Dr. *Franz Berger,* Wien.

Gelegentlich einer Untersuchung über die bleibenden Formänderungen wiederholt erwärmter und abgekühlter Körper[1]) war die Berechnung des Temperaturverlaufes in einem Rechtkant durchzuführen, über die an anderer Stelle ausführlich berichtet wurde[2]). Die Lösung der letzteren Aufgabe legte den Wunsch nahe, in ähnlicher Weise wie das Rechtkant (als Prisma von endlicher Länge) auch den Zylinder von endlicher Länge zu behandeln.

Der unendlich lange Zylinder ist bereits von Fourier in seiner Theorie der Wärme[3]) behandelt worden, und die ausführliche Darstellung durch H. Gröber[4]) hat die Lösung ähnlicher Wärmeleitaufgaben nach der numerischen Seite wesentlich erleichtert.

---

[1]) F. Berger, Über d. bleibenden Formänderungen wiederh. erh. u. abgek. Körper. Z. VDI. Bd. 72, 1928, S. 921.
[2]) F. Berger, Über d. Berechnung d. Temperaturverlaufes in einem Rechtkant b. Abkühlen u. Erwärmen. Z. f. ang. Math. u. Mech. 8 (1928), S. 479.
[3]) M. Fourier, Anal. Theorie d. Wärme. Berlin 1884, S. 253.
[4]) H. Gröber, Grundges. d. Wärmeleitg. u. d. Wärmeüberg. Berlin 1921, S. 51.

Der unendlich lange Zylinder ist zwar als Leiter für den elektrischen Strom und als Festigkeitskörper (Draht) technisch eine der wichtigsten geometrischen Formen. Aber wegen seines im Verhältnis zur Länge unendlich kleinen Querschnittes spielen Vorgänge in radialer Richtung nur eine untergeordnete Rolle. Diese Vorgänge werden dagegen von großer Wichtigkeit bei Zylindern, deren Querschnitt groß ist im Verhältnis zur Länge. Rasch verlaufende Temperaturänderungen, wie sie z. B. beim Härten von Werkzeugen auftreten, sind am wichtigsten an den Enden eines Zylinders (oder ähnlicher Formen), und diese Temperaturänderungen können nur am Zylinder von endlicher Länge untersucht werden.

In der vorliegenden Arbeit wird angegeben:

1. Wie die Temperatur eines beliebigen Punktes eines endlichen Zylinders für einen beliebig gegebenen Zeitpunkt zu berechnen ist, wenn der Zylinder mit einer gegebenen höheren Anfangstemperatur in ein Mittel von niedrigerer Temperatur gebracht wird (z. B. Härten in Wasser oder Öl) oder
   der kalte Zylinder zwecks Erwärmung in einen Raum von höherer Temperatur gebracht wird; und
2. wie der Temperaturverlauf beliebig ausgewählter Punkte des endlichen Zylinders in Abhängigkeit von der Zeit zu berechnen ist, wenn der Zylinder von gegebener Anfangstemperatur in ein Kühlmittel gebracht oder sich selbst überlassen wird.

Zu den unter 1 genannten Aufgaben ist zu bemerken, daß zwischen der Berechnung des Temperaturverlaufes beim Abkühlen und Erwärmen nur der Unterschied besteht, daß das Temperaturgefälle der Richtung der Wärmeströmung entsprechend mit dem richtigen Vorzeichen einzusetzen ist. Da es üblich ist, das Temperaturgefälle in der Richtung der zunehmenden Temperatur positiv zu bezeichnen, so ist es sinngemäß in der Richtung der abnehmenden Temperatur (beim Abkühlen also nach außen) negativ zu setzen.

Die Aufgabe 1 soll aber nicht als gelöst betrachtet werden, wenn die Temperaturen für bestimmte Punkte ziffernmäßig errechnet sind, da durch das bloße Anlegen eines Temperaturverzeichnisses kein Überblick über die Temperaturverteilung, auf die es doch in erster Linie ankommt, gewonnen wird. Es empfiehlt sich vielmehr, die Flächen gleicher Temperatur zu ermitteln und aufzuzeichnen. Die dadurch verursachte Mehrarbeit ist, wie gezeigt wird, ganz geringfügig. Zweckmäßig wird man diese isothermen Flächen für bestimmte gewählte Temperaturunterschiede (z. B. von 20° zu 20°) bestimmen. Mathematisch dargestellt beschränkt sich also die Aufgabe 1 nicht nur auf die Berechnung der Temperatur bestimmter Punkte zu gegebenen Zeiten, sondern erstreckt sich auch auf die Ermittlung der Punkte bestimmter Temperaturen für eine gegebene Zeit.

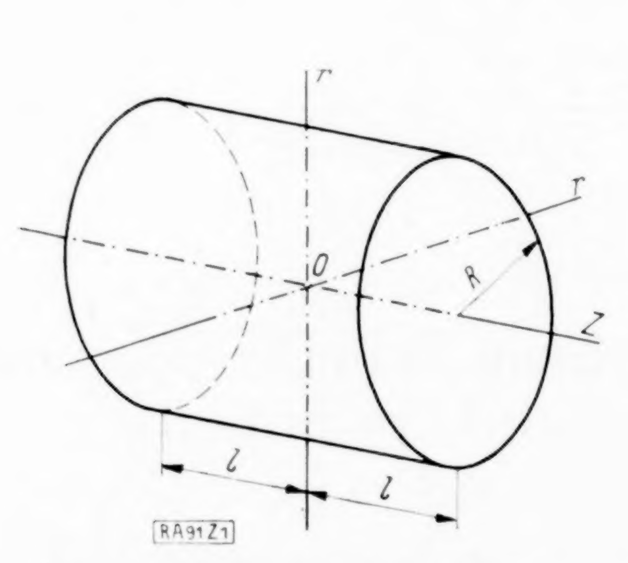


Abb. 1. Zylinder mit Achsenkreuz.

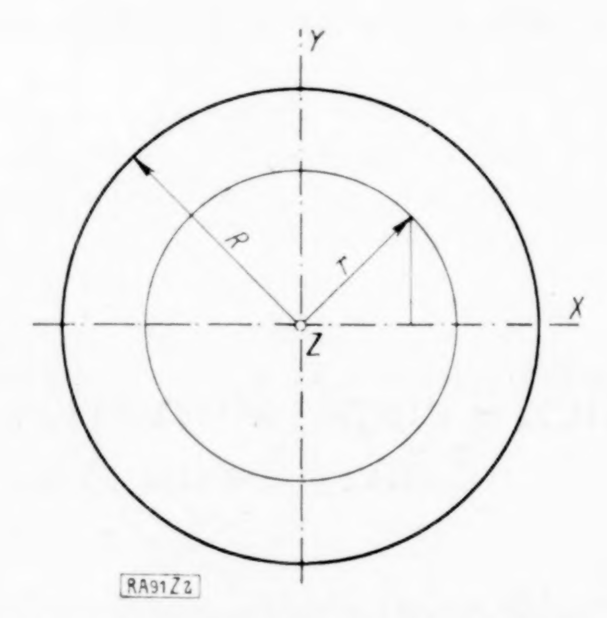


Abb. 2. Zylinderschnitt mit Polarkoordinaten.

Im nachfolgenden soll ein Abkühlungsvorgang, wie er z. B. beim Härten eines zylindrischen Werkstückes durch Abkühlen in einer Flüssigkeit auftritt, der Rechnung unterzogen werden. Den Ursprung des Koordinatensystems legen wir in den Schwerpunkt des Zylinders (Abb. 1). Die Längsachse des Zylinders nehmen wir als z-Achse an. Jede Senkrechte auf dieser Achse kann dann als r-Achse gelten, da der Abkühlungsvorgang des Zylinders als vollkommen achsensymmetrisch angesehen werden kann. Es liegt daher ein 2-dimensionales Problem vor. Alle für einen bestimmten Punkt mit den Koordinaten (r, z) berechneten Temperaturen gelten dann sinngemäß für alle Punkte mit diesen Koordinaten. Da die betreffenden Werte für $\pm z$ gleich sein müssen, gelten also die berechneten Temperaturen für 2 Kreise mit den Radien r, die in den Abständen $\pm z$ vom Schwerpunkt liegen.

Wir legen folgende Bezeichnungen fest:

ϑ = Temperatur in °C.

ϑ_0 = Temperatur des Zylinders zur Zeit $t = 0$. Wir setzen sie = 1. Alle beim Abkühlungsvorgang errechneten Temperaturen ergeben sich dann als Bruchteile von 1. Um die wirkliche Temperatur eines bestimmten Punktes in °C zu erhalten, braucht man bloß die für einen bestimmten Zeitpunkt errechnete Temperatur (in Bruchteilen von 1) mit der wirklichen Anfangstemperatur des Zylinders (z. B. 600 °C) zu multiplizieren.

ϑ_a = Temperatur der Umgebung, Außentemperatur, Temperatur des Kühlmittels. Wir nehmen sie dauernd = 0 an. Ist diese Temperatur größer als 0 (z. B. 10 °C), dann sind die errechneten Temperaturen als Übertemperaturen über diese Außentemperatur anzusehen. Die wirkliche Temperatur ist gleich der Summe der Außentemperatur und der errechneten Temperatur, beide in °C. Diese Überlegung gilt nur, solange die Anfangstemperatur des Zylinders groß ist gegen die Temperatur des Kühlmittels, was bei einem Härtevorgang ohne weiteres zutrifft.

t = Zeit in st,

λ = Wärmeleitfähigkeit in kcal/mstGrad,

c = spezifische Wärme der Gewichtseinheit in kcal/kg,

γ = spezifisches Gewicht in kg/m³,

$a = \frac{\lambda}{c\,\gamma}$ = Temperaturleitfähigkeit in m²/st,

α = Wärmeübergangszahl in kcal/m²stGrad,

$h = \frac{\alpha}{\lambda}$ = relative Wärmeübergangszahl in $\frac{1}{\mathrm{m}}$,

$2\,l$ = Länge des Zylinders in m,

R = Halbmesser des Zylinders in m.

Wird ein heißer Zylinder in eine kalte Flüssigkeit gebracht, so wird ein Temperaturausgleich zwischen Zylinder und Flüssigkeit eintreten. Wir haben es innerhalb des Zylinders mit einem zeitlich veränderlichen Temperaturfeld zu tun, das einem bestimmten Endzustand zustrebt. Wir setzen dabei voraus, daß die Flüssigkeitsmenge so groß ist, daß die durch den Temperaturausgleich eintretende Temperaturerhöhung vernachlässigt werden kann.

Für den Temperaturverlauf in einem 3-dimensionalen Körper gilt die partielle Differentialgleichung:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}\right) \quad \ldots \quad (1),$$

deren Ableitung in den meisten Lehrbüchern über Wärmetheorie zu finden ist, hier also wegbleiben kann[5]). Für die Anwendung auf den Zylinder ändern wir die Form zweckmäßigerweise etwas um. Die z-Achse behalten wir bei und wählen sie zur Zylinderachse. An die Stelle der Koordinaten x und y setzen wir die Entfernung r eines Punktes von der Achse im Sinne der Abb. 2. Dadurch ist das ganze Problem von einem räumlichen zu einem 2-dimensionalen vereinfacht. Darnach ist

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \ldots \quad (2).$$

Da allgemein

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{\partial \vartheta}{\partial r}\frac{dr}{dx}$$

und nach (2)

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \text{ so ist}$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{\partial \vartheta}{\partial r}\frac{x}{r} \quad \ldots \quad (3).$$

Durch nochmalige Differentiation von (3) erhalten wir

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2}\frac{x^2}{r^2} + \frac{\partial \vartheta}{\partial r}\frac{r^2 - x^2}{r^3} \quad \ldots \quad (4).$$

Einen in der Form genau gleichen Ausdruck erhalten wir für

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2}\frac{y^2}{r^2} + \frac{\partial \vartheta}{\partial r}\frac{r^2 - y^2}{r^3} \quad \ldots \quad (5).$$

[5]) Es seien nur genannt: M. Jakob, Wärmeleitung, im Handbuch d. Physik. Berlin 1926. Bd. XI, S. 45. — H. Gröber, a. a. O. S. 9. — M. Fourier, a. a. O. S. 75 u. v. a.

Durch Einsetzen von (4) und (5) in (1) erhält man

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (6).$$

Durch Integration dieser Differentialgleichung erhalten wir die gesuchten Temperaturen im Zylinder von endlicher Länge. Jede Lösung der Gl. (6) hat außerdem die gegebenen Randbedingungen zu erfüllen und zwar:

1. Die zeitliche Grenzbedingung:

   Die Oberflächentemperatur des Zylinders sei (ebenso wie seine Innentemperatur) zur Zeit $t=0$ (Beginn der Abkühlung) $\vartheta_0 = 1$. Für das durchzurechnende Zahlenbeispiel sei $\vartheta_0 = 600\,^\circ$ C. Es ist also:

$$\vartheta_{t=0} = \vartheta_0 = 1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (7).$$

2. Die räumlichen Grenzbedingungen:

   Diese bestehen in der Annahme einer bestimmten Umgebungstemperatur und eines Gesetzes, nach dem die Abgabe der Wärme von der Oberfläche an die Umgebung erfolgt. Man wählt hierfür zur Vereinfachung der Rechnung das Newtonsche Abkühlungsgesetz, laut welchem die von der Flächeneinheit in der Zeiteinheit an die Umgebung abgegebene Wärmemenge dem Temperaturunterschied zwischen Oberfläche und Umgebung proportional ist.

Aus der Gleichsetzung dieser Wärmemenge mit jener, die der Oberfläche von innen her zuströmt, ergibt sich, daß das Temperaturgefälle im Zylinder in unmittelbarer Nähe der Oberfläche proportional sein muß dem Temperaturunterschied zwischen Oberfläche und Umgebung. Diese Bedingung gilt für alle Punkte der Oberfläche und ist daher sowohl für die Mantelfläche des Zylinders als auch für dessen beide Endflächen anzuschreiben. Für die Mantelfläche des Zylinders gilt:

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial r}\right)_{r=R} = -h\,\vartheta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (8).$$

Für die beiden Endflächen:

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right)_{z=+l} = -h\,\vartheta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (9a)$$

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right)_{z=-l} = +h\,\vartheta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (9b).$$

Das verschiedene Vorzeichen rührt davon her, daß die Richtung der Wärmeströmung an den beiden Endflächen entgegengesetzt gerichtet ist.

Wir suchen nun ein Integral der Differentialgleichung (6). Da wir es mit einem 2-dimensionalen Problem zu tun haben, können wir annehmen, daß sich die Temperatur durch ein Produkt aus 2 Faktoren darstellen läßt, von denen ein Faktor nur von r und t, der andere nur von z und t abhängt. Auf Grund der bei der Berechnung des Temperaturverlaufes beim Rechtkant[6]) und beim unendlich langen Zylinder[7]) gemachten Erfahrungen setzen wir:

$$\vartheta = A\,e^{-n^2 a t} J_0(n r) \cdot B\,e^{-q^2 a t} \cos q z \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (10).$$

Hierbei sind A, B, n und q Festwerte, die aus den Oberflächenbedingungen zu bestimmen sind. Diese Ermittlung ist allerdings der mühsamste Teil der ganzen Temperaturberechnung und erfordert einige Geduld. $J_0(n r)$ ist die Besselsche Funktion 1. Art 0. Ordnung.

Um festzustellen, ob (10) ein partikuläres Integral von (6) ist, bilden wir die betreffenden Differentialquotienten und setzen sie in (6) ein. Zunächst vereinfachen wir noch die Schreibweise von (10) durch Zusammenziehen der e-Potenzen und der Festwerte A und B und schreiben (10) in der Form:

$$\vartheta = C\,e^{-(n^2+q^2) a t} \cdot J_0(n r) \cos q z \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (11).$$

Aus (11) erhalten wir:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = -C\,(n^2+q^2)\,a\,e^{-(n^2+q^2) a t} J_0(n r) \cos q z \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (12).$$

Ferner ist:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial r} = -C\,n\,e^{-(n^2+q^2) a t} J_1(n r) \cos q z \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (13)$$

weil

$$\frac{d}{d r} J_0(n r) = -n\,J_1(n r),$$

[6]) Siehe Anmerkung [2]). [7]) Siehe Anmerkung [3]).

wobei $J_1(n r)$ die Besselsche Funktion 1. Ordnung ist. Schließlich ist wegen

$$\frac{d}{d r} J_1(n r) = n J_0(n r) - \frac{1}{r} J_1(n r)$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} = - C n e^{-(n^2+q^2) a t} \cos q z \left[n J_0(n r) - \frac{1}{r} J_1(n r) \right] \quad \ldots \ldots \quad (14).$$

Wir haben noch $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}$ aus (11) zu bilden und erhalten:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} = - C q^2 e^{-(n^2+q^2) a t} J_0(n r) \cos q z \quad \ldots \ldots \quad (15).$$

Setzt man die Werte (12), (13), (14) und (15) in die Gl. (6) ein, so wird diese identisch erfüllt, womit der Nachweis erbracht ist, daß (11) ein partikuläres Integral von (6) ist. Wir kehren nun wieder zur Gl. (10) zurück.

Das allgemeine Integral erhält man aus dem partikulären, indem man für die Festwerte A, B, n und q alle jene Werte einsetzt, die den Oberflächenbedingungen entsprechen. Die Zahl dieser Festwerte ist zwar unendlich groß; da aber die mit ihnen gebildeten Reihen ver hältnismäßig rasch konvergieren, genügt es, so viele Werte davon festzulegen und einzusetzen daß bei einer numerischen Auswertung ein Grenzwert von ausreichender Genauigkeit erhalten wird. Häufig genügen schon 3 bis 4 Glieder. Das allgemeine Integral wäre auf Grund von (10) zu schreiben:

$$\vartheta = [A_1 e^{-n_1^2 a t} J_0(n_1 r) + A_2 e^{-n_2^2 a t} J_0(n_2 r) + \ldots] \cdot [B_1 e^{-q_1^2 a t} \cos q_1 z + B_2 e^{-q_2^2 a t} \cos q_2 z + \ldots] \quad (16)$$

oder in abgekürzter Schreibweise:

$$\vartheta = \sum_{i=1}^{i=\infty} A_i e^{-n_i^2 a t} J_0(n_i r) \cdot \sum_{i=1}^{i=\infty} B_i e^{-q_i^2 a t} \cos q_i z \quad \ldots \ldots \quad (17).$$

(16) oder (17) sind somit die gesuchten Gleichungen, die die Temperatur eines gegebenen Punktes eines sich abkühlenden oder erwärmenden Körpers als Funktion der Koordinaten und der Zeit darstellen. An einem durchgerechneten Zahlenbeispiel soll nun gezeigt werden, wie man die Gl. (17) zum Berechnen der Temperatur anwendet.

Gegeben sei ein Stahlzylinder von 100 mm Länge und 25 mm Durchmesser. Wir verwenden m, kg, kcal und st als Maßeinheiten und haben daher in den Rechnungen $l = 0{,}05$ m und $R = 0{,}0125$ m zu setzen. Um ϑ berechnen zu können, müssen wir vor allem die Festwerte n_i, q_i, A_i und B_i bestimmen. Dies geschieht in folgender Weise:

1. Bestimmung von n_i. n_i ergibt sich aus der Erfüllung der räumlichen Grenzbedingung, die durch Gl. (8) festgelegt ist. Setzen wir die uns bereits bekannten Werte von ϑ und $\frac{\partial \vartheta}{\partial r}$ [die Gl. (13) und (14)] in (8) ein, so erhalten wir nach Durchführung der sich ergebenden Kürzungen

$$n J_1(n R) = h J_0(n R) \quad \ldots \ldots \quad (18).$$

Da es unendlich viele Werte von n gibt, schreiben wir n_i an Stelle von n, wobei dann für i der Reihe nach 1, 2, 3 ... zu setzen ist. Ferner multiplizieren wir die Gleichung beiderseits mit R und betrachten $n_i R$ als neue Unbekannte. (18) schreibt sich dann:

$$n_i R \cdot J_1(n_i R) = h R \cdot J_0(n_i R) \quad \ldots \ldots \quad (19).$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir noch

$$n_i R = x_i$$

und erhalten

$$x_i \cdot J_1(x_i) = h R \cdot J_0(x_i) \quad \ldots \ldots \quad (20).$$

Haben wir x_i aus dieser Gleichung bestimmt, dann sind die gesuchten Werte von n_i:

$$n_i = \frac{1}{R} x_i \quad \ldots \ldots \quad (21).$$

Für Stahl ist $h = 42{,}4$, daher $h R = 0{,}53$. Die Gleichung lautet dann:

$$x_i \cdot J_1(x_i) = 0{,}53 \cdot J_0(x_i) \quad \ldots \ldots \quad (22).$$

Diese Gleichung ist nach x_i aufzulösen. Hierfür gibt es folgende Wege:

a) Zeichnerisch. Die beiden Seiten der Gl. (22) lassen sich als 2 getrennte Kurven auffassen, indem man setzt:

$$u_1 = x \cdot J_1(x) \quad \ldots \ldots \quad (23a)$$

$$u_2 = 0{,}53 \cdot J_0(x) \quad \ldots \ldots \quad (23b).$$

Man zeichnet diese Kurven für fortlaufende Werte von x auf und erhält in den Abszissen der Schnittpunkte dieser beiden Kurven jene Werte von x, die der Gl. (22) genügen. Die Werte der Bessel-Funktionen $J_0(x)$ und $J_1(x)$ entnimmt man aus Tafeln. Als solche kommen für den praktischen Gebrauch wohl nur die Funktionentafeln von Jahnke und Emde[8]) in Betracht. Diese enthalten die Bessel-Funktionen 1. Art der Ordnung 0 und 1 nur bis zum Argument $x = 15{,}5$. In Abb. 3 sind die beiden Kurven (23a) und (23b) dargestellt. Man sieht, daß sich die Lage der Schnittpunkte der Kurven ziemlich sicher feststellen läßt. Es zeigt sich aber die Schwierigkeit, daß man nicht mehr als 5 Schnittpunkte bestimmen kann, weil nicht genügend Werte von Bessel-Funktionen zur Verfügung stehen. Reichen für eine bestimmte Aufgabe 5 Werte von x_i nicht mehr aus, so muß man wie weiter unten angegeben verfahren. Laut dem vom Institut für angewandte Mathematik und Mechanik an der Uni-

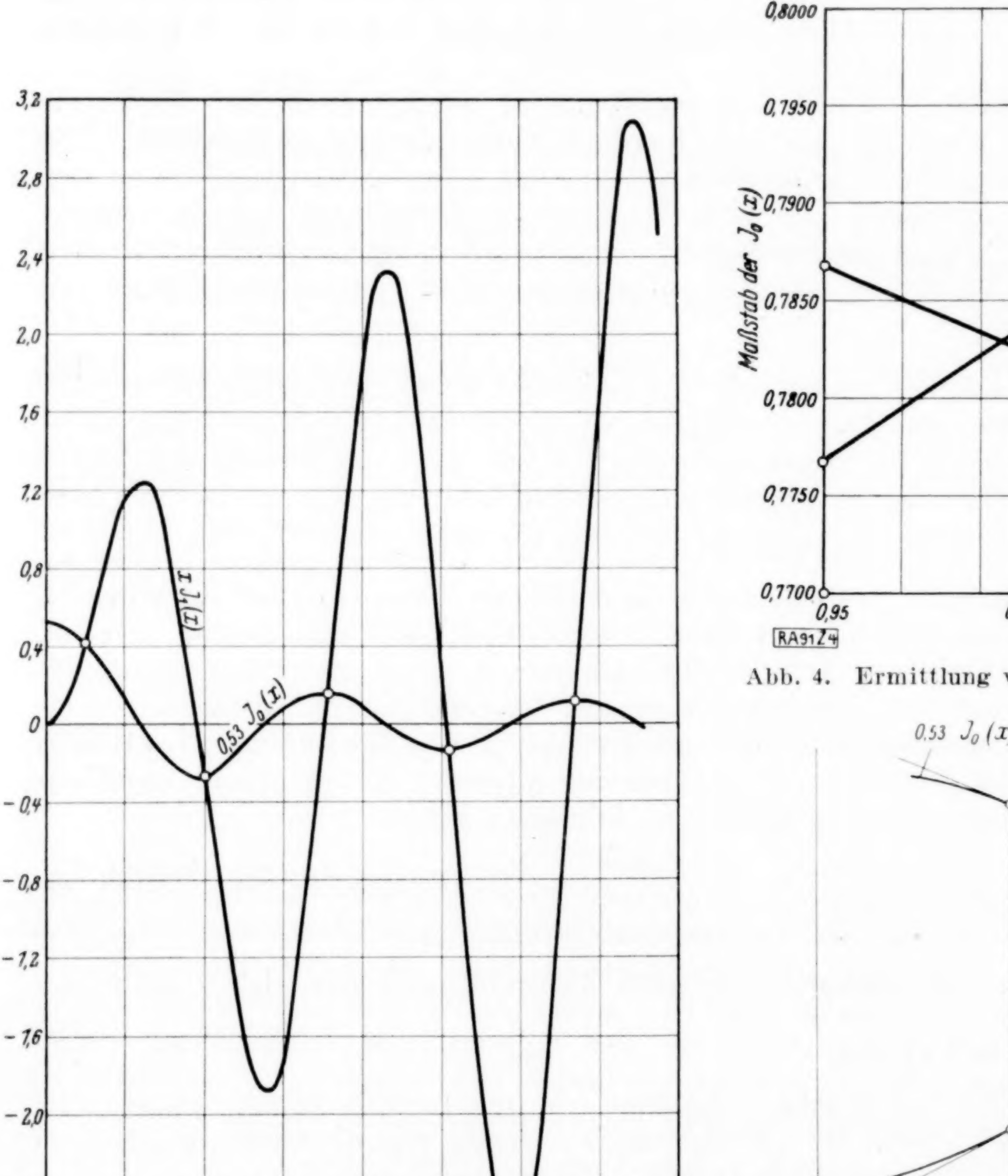


Abb. 3. Auflösung der Gleichung $x\,J_1(x) = 0{,}53\,J_0(x)$.

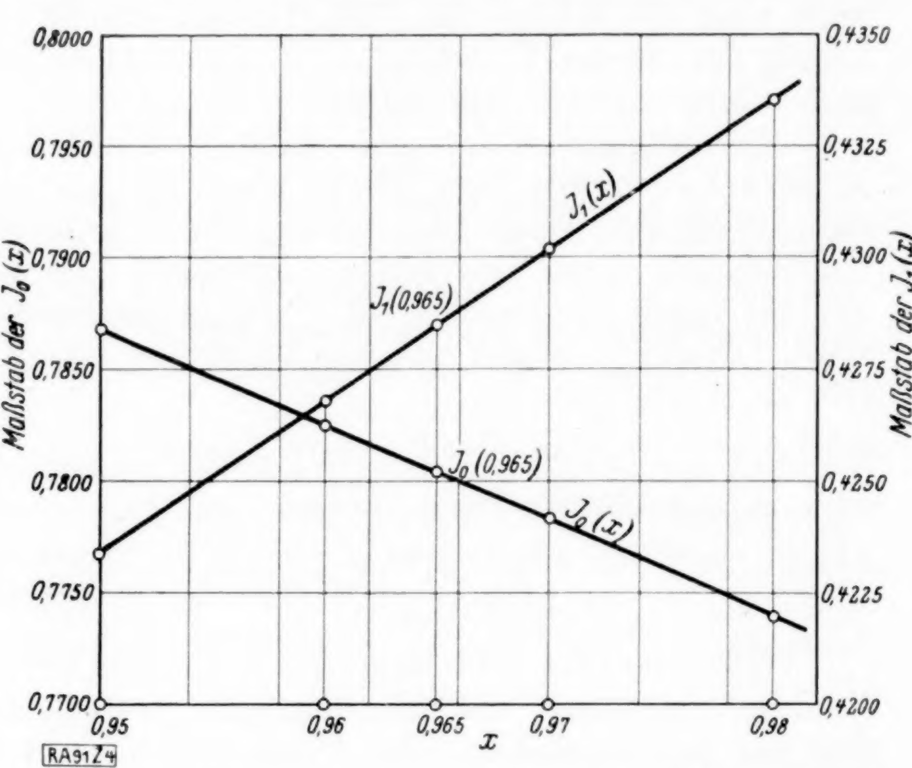


Abb. 4. Ermittlung von $J_0(x)$ und $J_1(x)$ durch Interpolation.

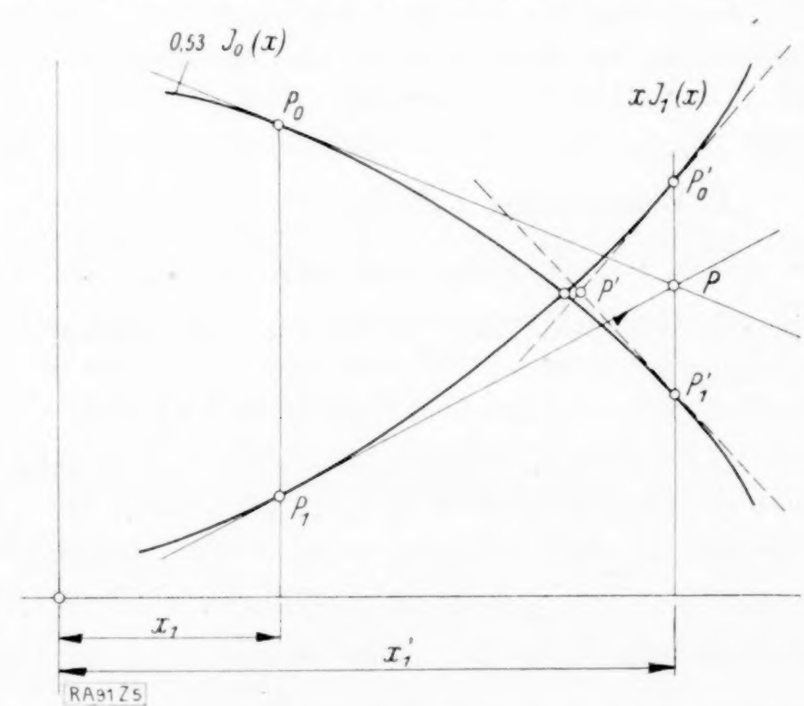


Abb. 5. Näherungsmethode zur Auflösung der Gleichung $x\,J_1(x) = 0{,}53\,J_0(x)$.

versität Berlin herausgegebenen Verzeichnis berechneter Funktionstafeln[9]) gibt es aber außer den in Jahnke und Emde bereits enthaltenen Tafeln Besselscher Funktionen (mit Argumentsprüngen von 0,01) nur noch solche bis zum Argument $x = 20$, die aber einesteils mit den verhältnismäßig großen Argumentsprüngen von 0,1 berechnet, andernteils in älteren Schriften enthalten sind, die nicht mehr im Buchhandel erhältlich und daher nur schwer zugänglich sind.

Übrigens sind die ersten 4 Wurzeln der Gl. (23) durch Interpolation der Zahlentafel Nr. 4 des Buches von H. Gröber[10]) zu entnehmen, wodurch das zeitraubende Zeichnen, das auch nur eine geringe Genauigkeit der Bestimmung zuläßt, erspart wird. Kommt man mit 4 Wurzeln

[8]) E. Jahnke u. F. Emde, Funktionentafeln. Leipzig 1909. Die Werte von $J_0(x)$ und $J_1(x)$ sind auf S. 111 bis 122 enthalten, und zwar ist $-J(x)$ statt $+J(x)$ angegeben. Die Tafelwerte sind daher mit entgegengesetztem Zeichen zu nehmen.

[9]) Verzeichnis berechneter Funktionentafeln, 1. Teil: Besselsche, Kugel- und elliptische Funktionen. Berlin 1928.

[10]) H. Gröber, a. a. O. S. 52.

und mit 2 Dezimalstellen derselben aus, dann ist die weitere Berechnung der Temperaturen dadurch sehr abgekürzt.

Hat man die zu $hR = 0{,}53$ gehörigen x_i (bei Gröber mit μ bezeichnet) durch Interpolation gefunden, so sucht man die zugehörigen Werte von J_0 und J_1[11]. Für den angegebenen Wert von hR findet man als ersten Wurzelwert z. B. $x = 0{,}965$. Da für die gefundenen x_i die Werte der Bessel-Funktionen nicht mehr in den Tafeln enthalten sind, bestimmt man auch sie durch graphische Interpolation, wie dies für x_1 in Abb. 4 beispielsweise dargestellt ist. Man entnimmt den Tafeln die dem Wert von $x_1 = 0{,}965$ zunächst liegenden Werte von J_0 und J_1 z. B. für $x = 0{,}95$, $0{,}96$, $0{,}97$ und $0{,}98$ und schneidet aus der Abszisse $x = 0{,}965$ die Kurven, die J_0 und J_1 darstellen und sich bei passend gewähltem Maßstab fast als Gerade abbilden. Die gefundenen Werte von J_0 und J_1 lassen sich noch verbessern. Man setzt sie in (22) ein, welche Gleichung nicht genau erfüllt sein wird, weil es sich doch um zeichnerisch gefundene Näherungswerte handelt. Man wird etwa finden:

$$x_1 \cdot J_1(x_1) - 0{,}53 \cdot J_0(x_1) = \Delta_1 .$$

Man nimmt nun durch Schätzung einen verbesserten Wert von x_1 an, bestimmt dafür J_0 und J_1 und sucht von neuem das zugehörige Δ_2. Trägt man die Werte von x als Abszissen und die zugehörigen Werte von Δ als Ordinaten auf, so erhält man im allgemeinen eine Kurve $\Delta = f(x)$, die zur Abszissenachse schräg verläuft. Der Schnittpunkt dieser Kurve mit der Abszissenachse gibt jenen Wert von x an, für den $\Delta = 0$ ist, der also der Gl. (22) am genauesten entspricht und so gut ist, als die zeichnerische Methode dies überhaupt zuläßt. Näherungswerte für x_i, die über $i = 5$ hinausgehen, kann man erhalten, wenn man die möglichst genau bestimmten Werte von x_i als Ordinaten für fortlaufende Werte von i als Abszissen in einer Kurve aufträgt. Sie ist nahezu eine Gerade. Durch Verlängern für zunehmende i kann man die zugehörigen weiteren x an der Ordinatenskala als gut brauchbare Näherungswerte ablesen.

b) Rechnerisch. Auch diese Methode ist eine Näherungsmethode[12], ermöglicht es aber, dem wahren Wert von x_i beliebig nahezukommen. Wir denken uns wie vorher die Gl. (22) durch zwei selbständige Kurven dargestellt (Abb. 5). Die Abszisse des Schnittpunktes der Kurven wäre die genaue Lösung. Wir nehmen zunächst einen Näherungswert x_1 an, den wir nach einer der oben erwähnten Methoden ermittelt haben. Dem x_1 entsprechen zwei Punkte P_0 und P_1. Wir legen durch diese Punkte je eine Tangente und bestimmen deren Schnittpunkt P. Diesem Schnittpunkt entspricht ein Wert x_1', der dem wahren Wert schon näher ist. Wiederholen wir das Verfahren und legen durch die dem Wert x_1' entsprechenden Punkte P_0' und P_1' wieder Tangenten, so wird die Abszisse von deren Schnittpunkt dem wahren Wert noch näher sein. Hat man den ersten Näherungswert x_1 nicht zu ungenau angenommen, so wird oft schon die erste Annäherung einen brauchbaren Wert für x_i liefern.

Der Gang der Rechnung ist folgender: Wir denken uns die Gl. (22) wieder in die zwei selbständigen Gleichungen

$$y = x \cdot J_1(x) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (24),$$

$$y = 0{,}53 \cdot J_0(x) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (25)$$

zerlegt. Die Gleichung der Tangente durch den Punkt $P_1(x_1, y_1)$ lautet:

$$y - y_1 = \frac{dy}{dx}(x - x_1),$$

und da nach (24)

$$y_1 = x_1 \cdot J_1(x_1)$$

und

$$\frac{dy_1}{dx} = x_1 \cdot J_0(x_1),$$

so ist die Gleichung der Tangente

$$y - x_1 \cdot J_1(x_1) = x_1 \cdot J_0(x_1) \cdot (x - x_1) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (26).$$

In ähnlicher Weise ergibt sich die Tangente durch den Punkt $P_0(x_1, y_0)$

$$y - 0{,}53 \cdot J_0(x_1) = -0{,}53 \cdot J_1(x_1) \cdot (x - x_1) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (27).$$

Lösen wir diese beiden Gleichungen nach x_1 auf (durch Elimination von y, das nicht gebraucht wird), so erhalten wir die Abszisse des Schnittpunktes, die wir mit x_1' bezeichnen.

[11]) Der kürzeren Schreibweise wegen soll im folgenden das Argument bei den Bessel-Funktionen weggelassen werden.

[12]) Sie rührt von H. Dr. K. Kohler, Wien, her.

x_1' liegt, wie Abb. 5 zeigt, der Abszisse des wirklichen Schnittpunktes der Kurven (24) und (25) wesentlich näher als x_1. Die Auflösung ergibt:

$$x_1' = \frac{(x_1^2 + 0{,}53) \cdot J_0(x_1) - 0{,}47 \cdot x_1 \cdot J_1(x_1)}{x_1 \cdot J_0(x_1) + 0{,}53 \cdot J_1(x_1)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (28).$$

Wir wollen die damit erreichte Größe der Annäherung an einem Beispiel nachweisen. In dem oben erwähnten Zahlenbeispiel ist für x_1 ein erster Näherungswert von 0,965 angenommen worden. Für dieses Argument finden wir aber keine Werte der Bessel-Funktionen in den Tafeln und müßten sie erst durch Interpolation bestimmen. Wir wählen daher der Bequemlichkeit halber $x_1 = 0{,}96$ und setzen dieses in (28) ein. Wir erhalten als verbesserten Wert $x_1' = 0{,}965113$. Setzen wir diesen Wert zur Prüfung der erreichten Genauigkeit in (22) ein, so erhalten wir ein $\Delta = -0{,}000001$. Die erreichte Genauigkeit ist daher schon bei der ersten Annäherung für praktische Zwecke sehr groß. Um diese Probe machen zu können, müssen wir die Werte von J_0 und J_1 für das Argument $x_1' = 0{,}965113$ durch Interpolation aus den Tafeln bestimmen. Durch x_1 ist nach (21) auch das eigentlich gesuchte n_1 bestimmt und ergibt sich zu $n_1 = 77{,}2090$.

In ähnlicher Weise verfährt man, um $n_2, n_3 \ldots$ zu bestimmen. Bis zum Werte von x_5 bzw. n_5 kann man die Werte von J_0 und J_1 noch aus den Tafeln entnehmen. Braucht man aber mehr als fünf Werte x_i (und das ist auch in unserem Zahlenbeispiel der Fall), so muß man sich die erforderlichen Werte von J_0 und J_1 selbst berechnen. Da es sich nur um große Werte des Arguments handelt, kann man die Werte von J_0 und J_1 leicht nach folgenden Formeln berechnen[13]):

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[P_0(x) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - Q_0(x) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad \ldots \ldots \quad (29),$$

wobei

$$P_0(x) = 1 - \frac{9}{128 \cdot x^2} + \frac{3675}{32768 \cdot x^4} - \ldots \quad \ldots \ldots \quad (30)$$

$$Q_0(x) = \frac{1}{8x} - \frac{75}{1024 \cdot x^3} + \frac{59535}{262144 \cdot x^5} + \ldots \quad \ldots \ldots \quad (31).$$

Ebenso ist:

$$J_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[P_1(x) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + Q_1(x) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right] \quad \ldots \ldots \quad (32),$$

wobei

$$P_1(x) = 1 + \frac{15}{128 \cdot x^2} - \frac{4725}{32768 \cdot x^4} + \ldots \quad \ldots \ldots \quad (33)$$

$$Q_1(x) = \frac{3}{8x} - \frac{105}{1024 \cdot x^3} + \frac{72765}{262144 \cdot x^5} - \ldots \quad \ldots \ldots \quad (34).$$

Die Reihen (30), (31), (33) und (34) sind stark konvergent, und zwar um so mehr, je größer das Argument selbst ist, so daß für praktische Zwecke schon zwei bis drei Glieder genügen. Der Umstand, daß die Bessel-Funktionen für größere Werte des Arguments als 15,5 nicht mehr aus Tafeln entnommen werden können, braucht daher kein Hindernis für die Ausführung derartiger Temperaturberechnungen für den Techniker zu bilden.

2. Bestimmung von q_i. Die Werte von q_i ergeben sich aus der Erfüllung der räumlichen Grenzbedingungen, die durch die Gl. (9) festgelegt sind. Die Ermittlung dieser Werte ist bereits in einer früheren Arbeit des Verfassers[14]) ausführlich dargelegt worden und auch aus dem schon wiederholt genannten Buch von H. Gröber[15]) für den Fall der zeichnerischen Ermittlung zu entnehmen. Des Zusammenhanges wegen soll das Verfahren nur kurz wiedergegeben werden.

Wir bilden aus (11) $\frac{\partial \vartheta}{\partial z}$ und erhalten:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial z} = -C q e^{-(n^2 + q^2) a t} \cdot J_0(n r) \sin q z \quad \ldots \ldots \ldots \quad (35).$$

Setzen wir diesen Wert und den für ϑ selbst aus (11) in eine der Bedingungsgleichungen (9a) oder (9b) ein, so bleibt nach durchgeführter Kürzung

$$q \sin q l = h \cos q l.$$

[13]) P. Schafheitlin, Theorie d. Besselschen Funktionen. Leipzig 1908, S. 48. — Jahnke und Emde, a. a. O. S. 99.

[14]) Siehe Anmerkung [2]).

[15]) H. Gröber, a. a. O. S. 18 ff.

Wir multiplizieren beiderseits mit l und betrachten $q\,l$ als neue Unbekannte, wobei wir zur Vereinfachung der Schreibweise $q\,l = y$ setzen. Wir haben dann die Gleichung

$$y \sin y = h\,l \cos y \quad \ldots \ldots \quad (36)$$

nach y aufzulösen. Die Gleichung hat unendlich viele Wurzeln. Hat man ein bestimmtes y_i festgestellt, so ergibt sich daraus der gesuchte Wert von q_i zu

$$q_i = \frac{1}{l}\,y \quad \ldots \ldots \quad (37).$$

Setzen wir für h und l die für unser Zahlenbeispiel gewählten Werte ein, so wird $h\,l = 2{,}12$ und die Gl. (36) lautet schließlich:

$$y \sin y = 2{,}12 \cos y \quad \ldots \ldots \quad (38).$$

Die Auflösung dieser Gleichung kann durch Zeichnung oder Rechnung erfolgen. Wir verwenden den für unseren Zweck praktischeren Rechnungsweg und zwar die Newtonsche Näherungsmethode. Wir schreiben (38) in der Form:

$$z = 2{,}12 \cos y - y \sin y$$

und bilden davon den Differentialquotienten

$$z' = -3{,}12 \sin y - y \cos y .$$

Dann ist

$$\varDelta = -\frac{z}{z'}$$

ein zusätzlicher Verbesserungswert für den ersten gewählten Näherungswert von y. Zur Bestimmung der ersten fünf Näherungswerte verwendet man am besten die Zahlentafel Nr. 2 des Gröberschen Buches[16]), aus der die betreffenden Werte durch Interpolation leicht ermittelt werden können. Bei Benützung dieser Zahlentafel ist nur zu beachten, daß die hier mit y bezeichneten Werte dort mit δ bezeichnet sind und daß die obige Gl. (36) bei Gröber lautet

$$\operatorname{cotg} \delta = \frac{\delta}{h\,X} .$$

Der Zusammenhang beider ist ohne weiteres ersichtlich.

Die Gröbersche Form eignet sich besser für die zeichnerische Auflösung, während zur Anwendung der Newtonschen Näherungsmethode die Form (36) die geeignetere ist.

Ob wir Gl. (9a) oder (9b) zur Ermittlung von y heranziehen, ist gleichgültig und muß es wegen der symmetrischen Lage des Koordinatenursprungs zu den Endflächen $z = \pm l$ des Zylinders auch sein.

Wenn man die angegebenen Verfahren für die Bestimmung von n_i und q_i für $i = 1$ bis 8 auf unser Zahlenbeispiel anwendet, erhält man die in der nachstehenden Zahlentafel angegebenen Werte:

i	n_i	q_i
1	77,20904	21,88594
2	317,34008	73,31642
3	567,27952	131,88476
4	818,0240	192,82452
5	1069,07456	254,67924
6	1320,22960	316,82006
7	1571,4292	379,21802
8	1822,66904	441,73690

Wie weit man in der Wahl des i gehen muß, läßt sich im vorhinein schwer feststellen, da dies von dem Zweck der Untersuchung abhängt. Wir haben eigentlich Fouriersche Reihen zu summieren und müssen die Zahl der zu summierenden Glieder so groß wählen, daß die Summe der vernachlässigten Glieder für den vorliegenden Untersuchungszweck nicht mehr in Betracht kommt.

3. Bestimmung von A_i. Die Festwerte A_i und B_i ergeben sich aus der Erfüllung der zeitlichen Grenzbedingung. Nach (7) ist zur Zeit $t = 0$ (Beginn der Abkühlung) die Temperatur $\vartheta_0 = 1$. Setzen wir diesen Wert in Gl. (17) ein, so wird

$$1 = \sum_1^\infty A_i J_0(n_i r) \cdot \sum_1^\infty B_i \cos q_i z \quad \ldots \ldots \quad (39).$$

[16]) H. Gröber, a. a. O. S. 21.

Da keiner der Faktoren größer als 1 sein kann, so kann das Produkt aus zwei Faktoren nur 1 sein, wenn jeder Faktor für sich $=1$ ist. Wir können daher statt (39) schreiben:

$$1 = A_1 J_0(n_1 r) + A_2 J_0(n_2 r) + A_3 J_0(n_3 r) + \dots \qquad (40)$$

$$1 = B_1 \cos q_1 z + B_2 \cos q_2 z + B_3 \cos q_3 z + \dots \qquad (41).$$

Um nun A_i zu bestimmen, multiplizieren wir (40) beiderseits mit $r J_0(n_i r)$ und wählen für i jenen Wert 1, 2,.., für den A_i berechnet werden soll. Zur Berechnung von A_1 z. B. multiplizieren wir mit $r J_0(n_1 r)$ und erhalten:

$$r J_0(n_1 r) = A_1 r J_0^2(n_1 r) + A_2 r J_0(n_1 r) J_0(n_2 r) + A_3 r J_0(n_1 r) J_0(n_3 r) + \dots$$

Integrieren wir diese Gleichung von 0 bis R (der Mantelfläche des Zylinders), so wird

$$\int_0^R r J_0(n_1 r)\,dr = A_1 \int_0^R r J_0^2(n_1 r)\,dr + A_2 \int_0^R r J_0(n_1 r) J_0(n_2 r)\,dr + A_3 \int_0^R r J_0(n_1 r) J_0(n_3 r)\,dr + \dots$$

Die Integrale auf der rechten Seite verschwinden aber mit Ausnahme des ersten[17]), so daß wir erhalten

$$A_1 = \frac{\int_0^R r J_0(n_1 r)\,dr}{\int_0^R r J_0^2(n_1 r)\,dr} \qquad (42).$$

Das Integral im Zähler ist

$$\int_0^R r J_0(n_1 r)\,dr = \frac{R}{n_1} J_1(n_1 R),$$

das im Nenner ist

$$\int_0^R r J_0^2(n_1 r)\,dr = \frac{R^2}{2}\left[J_0^2(n_1 R) + J_1^2(n_1 R)\right].$$

Durch Einsetzen dieser Werte in (42) wird

$$A_1 = \frac{2 J_1(n_1 R)}{(n_1 R)\,[J_0^2(n_1 R) + J_1^2(n_1 R)]} \qquad (42a).$$

Was für $i=1$ gilt, gilt in gleichem Maße auch für jeden anderen Wert von i, so daß wir allgemein setzen können:

$$A_i = \frac{2 J_1(n_i R)}{(n_i R)\,[J_0^2(n_i R) + J_1^2(n_i R)]} \qquad (43).$$

Die vorkommenden Werte von $J_0(n_i R)$ und $J_1(n_i R)$ entnimmt man den Tafeln, wenn nötig durch Interpolation. Sind sie in den Tafeln nicht mehr enthalten, dann berechnet man sie nach den oben angegebenen Formeln (29) und (32).

4. Bestimmung von B_i. Die Ermittlung der Werte B_i ist ebenfalls in der schon erwähnten Arbeit ausführlich dargelegt und auch in dem Buch von Gröber enthalten. Des Zusammenhanges wegen soll sie nur kurz angegeben werden. Wir multiplizieren zur Bestimmung von B_1 die Gl. (41) mit $\cos q_1 z$ und integrieren von $-l$ bis $+l$ (über die ganze Länge des Zylinders). Dadurch erhalten wir:

$$\int_{-l}^{+l} \cos q_1 z\,dz = B_1 \int_{-l}^{+l} \cos^2 q_1 z\,dz + B_2 \int_{-l}^{+l} \cos q_1 z \cdot \cos q_2 z\,dz + B_3 \int_{-l}^{+l} \cos q_1 z \cdot \cos q_3 z\,dz + \dots$$

Die Integrale auf der rechten Seite der Gleichung sind mit Ausnahme der ersten Null und verschwinden, so daß bleibt:

$$B_1 = \frac{\int_{-l}^{+l} \cos q_1 z\,dz}{\int_{-l}^{+l} \cos^2 q_1 z\,dz}.$$

Nach Auswertung des Integrals und Einsetzen bleibt:

$$B_i = \frac{2 \sin q_i l}{q_i l + \sin q_i l \cdot \cos q_i l} \qquad (44).$$

[17]) Siehe P. Schafheitlin, a. a. O. S. 72.

Da man statt $i=1$ auch $i=2, 3,..$ setzen kann, gilt die Formel (44) für alle Werte von i. Daher ist auch sofort i an die Stelle von 1 gesetzt worden, um die allgemeine Form der Formel für B_i zu erhalten. Durch Auswertung der Gl. (43) und (44) erhält man die in der nachstehenden Zahlentafel angegebenen Werte von A_i und B_i für das behandelte Zahlenbeispiel.

i	A_i	B_i
1	+ 1,12044	+ 1,18332
2	− 0,16581	− 0,24426
3	+ 0,06969	+ 0,08890
4	− 0,04055	− 0,04269
5	+ 0,02717	+ 0,02586
6	− 0,01967	− 0,01661
7	+ 0,01526	+ 0,01165
8	− 0,01222	− 0,00861

Man erkennt sofort, daß die Summe der Werte sowohl von A_i als auch von B_i für $i=\infty$ sich dem Wert 1 nähert.

Da nunmehr alle Festwerte, die in der Gl. (17) vorkommen, bestimmt sind, kann damit die Temperatur ϑ irgendeines Punktes des Zylinders zu irgendeiner Zeit berechnet werden. Als Anwendungsbeispiel sollen die zwei eingangs erwähnten Aufgaben gelöst werden, nämlich

1. die Temperaturverteilung in dem Zylinder zu einer bestimmten Zeit nach Beginn der Abkühlung und
2. den Temperaturverlauf bestimmter Punkte des Zylinders in Abhängigkeit von der Zeit zu berechnen.

1. Temperaturverteilung im Zylinder zu einer bestimmten Zeit nach Beginn der Abkühlung.

Man erhält ein anschauliches Bild der Temperaturverteilung, wenn man die Flächen gleicher Temperatur für den gewählten Zeitpunkt ermittelt. Da wir es beim Zylinder mit einem 2-dimensionalen Problem zu tun haben, genügt es, wenn wir die Flächen gleicher Temperatur für eine durch die Zylinderachse gehende Meridianebene ermitteln. Wir nehmen einen Stahlzylinder von 100 mm Länge und 25 mm Durchm. an, für den also $l=0{,}05$, $R=0{,}0125$, $\lambda=47{,}16$, $c=0{,}12$, $\gamma=7860$ und daher $a=0{,}05$. Der Zylinder sei auf eine Temperatur von 600° erwärmt und werde in Wasser von 0° getaucht. Wir stellen uns die Aufgabe, die Temperaturverteilung in diesem Zylinder 4 sek (= 0,001 st) nach Beginn der Abkühlung zu berechnen.

Durch Einsetzen der angegebenen Zahlen in die Gl. (16) erhält man das gesuchte ϑ. Die Rechnung führt man der erforderlichen Übersicht wegen und zur Vermeidung wiederholter Berechnung derselben Werte in Tabellenform aus, indem man in einer senkrechten Reihe links die Werte von i (1, 2, ..) aufträgt und in einer waagrechten Reihe für jedes i die wichtigsten, wiederholt vorkommenden Werte für $t=0{,}001$, d. i. n_i^2, $n_i^2\,at$, $e^{-n_i^2 at}$, $A_i\,e^{-n_i^2 at}$; q_i^2, $q_i^2\,at$, $e^{-q_i^2 at}$ und $B_i e^{-q_i^2 at}$. Dann wählt man bestimmte Punkte im Zylinder, in denen man die Temperatur zu berechnen wünscht und setzt deren Koordinaten (r, z) in $J_0(n_i r)$ bzw. in $\cos q_i z$ ein. Zur Erleichterung der Zahlenrechnungen benützt man vorteilhaft außer dem schon genannten Buch von Gröber mit seinen Zahlentafeln noch die 5stelligen Tafeln von K. Hayashi[18]). Der absolute Wert der Ausdrücke von der Form $A_i e^{-n_i^2 at}\,J_0(n_i r)$ und $B_i\,e^{-q_i^2 at}\cos q_i z$ nimmt mit zunehmendem i verhältnismäßig rasch ab. Sie bilden mit fortschreitendem i eine oszillierende Reihe, da wegen der periodischen Funktionen $J_0(n_i r)$ und $\cos q_i z$ Zeichenwechsel auftritt. Wie weit man in der Wahl des i und damit in der Bestimmung der Festwerte n_i, q_i, A_i und B_i zu gehen hat, erkennt man schon bei der Berechnung des ersten Wertes von ϑ. Da man immer Reihensummen zu bilden hat, dürfen die vernachlässigten Glieder den Wert der letzten Dezimalstelle nicht mehr beeinflussen. Begnügt man sich mit Näherungswerten für ϑ, so können mitunter zwei bis drei Dezimalen bei den Festwerten genügen. Bei dem vorliegenden Zahlenbeispiel sind sechs Dezimalen berechnet, die letzte aber nur zur Sicherstellung der fünften verwendet worden. Es ist zu beachten, daß die Temperatur ϑ in Bruchteilen von 1 erhalten wird und daß sie, um Celsiusgrade auszudrücken, mit der Anfangstemperatur (hier 600° C) zu multiplizieren ist. Soll also die erste Dezimale der C-Grade sichergestellt sein, dann sind zwei Dezimalen davon zu berechnen. Da man nun derartige Temperaturberechnungen in der Regel nur für Anfangstemperaturen von

[18]) K. Hayashi, 5stellige Tafeln der Kreis- u. Hyperbelfunktionen sowie der Funktionen e^x und e^{-x} mit den natürl. Zahlen als Argument. Leipzig 1921. Ver. wissensch. Verleger.

über 100° durchführen wird, so wird das Rechnungsergebnis nach Formel (16) noch mit einer Zahl zu multiplizieren sein, die größer als 100 ist, d. h. man braucht vier Dezimalen von ϑ als Bruchteil von 1, wenn die erste Dezimale der C-Grade sicher sein soll.

Die Berechnung der Temperaturen wird man so ausführen, daß man durch die Meridianebene Gerade parallel zur Zylinderachse führt und auf diesen in zweckmäßig gewählten Abständen die Temperaturen berechnet. Selbstverständlich kann man auch Gerade senkrecht zur Achse annehmen und auf diesen in bestimmten Abständen Punkte auswählen. Im ersten Falle ist aber die Rechenarbeit etwas geringer, weshalb diese Methode zu empfehlen ist.

Abb. 6. Temperaturverteilung in einem Quadranten eines achsialen Zylinderschnittes. Die Zahlen bedeuten ° C.

Im vorliegenden Beispiel wurden außer der Achse selbst ($r=0$) und einer Zylindererzeugenden ($r=R=0{,}0125$) noch Gerade parallel zur Achse in den Abständen $r=0{,}005$, 0,0075 und 0,01 gewählt. Auf diesen Geraden wurden in Abständen $z=0{,}01$, 0,02, 0,03, 0,035, 0,04, 0,045, 0,0475 und 0,05 (Zylinderende) die Temperaturen berechnet. Das Ergebnis ist in Abb. 6 dargestellt. Es empfiehlt sich, in der Nähe der Begrenzungsflächen die gewählten Punkte dichter anzunehmen, weil von vornherein zu erwarten ist, daß dort die Isothermen die stärkste Krümmung aufweisen und daher eine dichtere Verteilung berechneter Punkte zur Verfügung stehen soll.

Ein Blick auf die Gl. (17) zeigt bezüglich der Temperaturberechnung folgendes: Für alle Punkte in der Achse ist $r=0$ und daher

$$\vartheta = \sum_1^\infty A_i\, e^{-n_i^2 at} \cdot \sum_1^\infty B_i\, e^{-q_i^2 at} \cos q_i z \qquad (45).$$

Für den Schwerpunkt selbst ist außerdem $z=0$ und (17) reduziert sich auf:

$$\vartheta = \sum_1^\infty A_i\, e^{-n_i^2 at} \cdot \sum_1^\infty B_i\, e^{-q_i^2 at} \qquad (46).$$

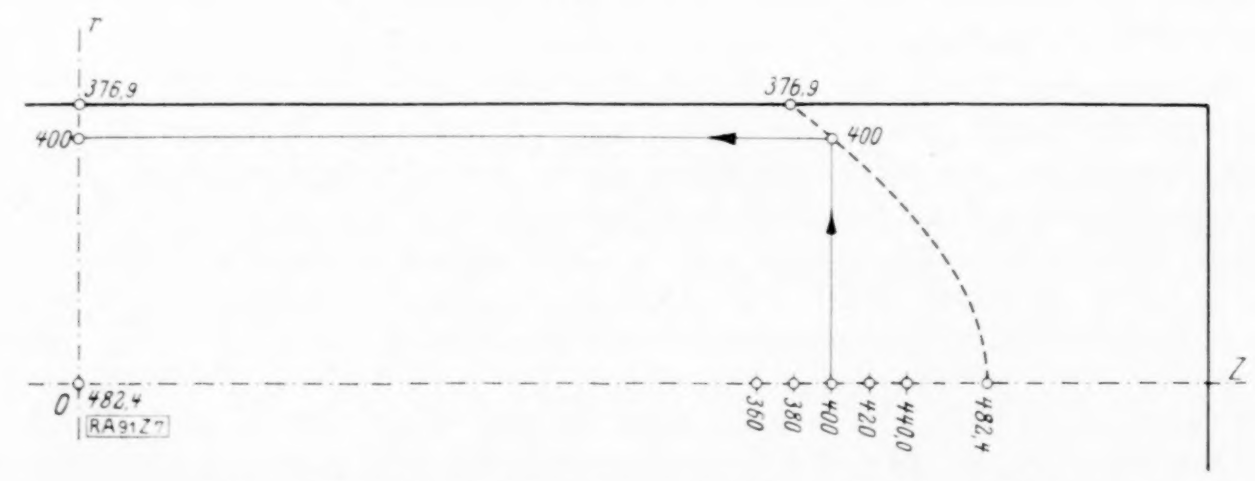


Abb. 7. Ermittlung der Isothermen bestimmter Temperatur.

Um ein anschauliches Bild der Temperaturverteilung zu erhalten, zeichnet man die Isothermen für bestimmte ausgewählte, in gleichen Abstufungen liegende Temperaturen auf. Hier sind die Isothermen für Temperaturunterschiede von je 20° ermittelt worden. Mathematisch bedeutet dies die Auflösung der Gl. (16) oder (17) nach einer der Unbekannten r oder z für ein gegebenes ϑ und ein gewähltes z bzw. r. Da dies algebraisch nicht möglich ist, muß es zeichnerisch geschehen. An einem Beispiel soll das Verfahren erläutert werden.

Es soll in der Geraden $z=0$ der Meridianebene die Lage der Punkte bestimmt werden, die den Temperaturen 380°, 400°, 420°,.. entsprechen. Die Temperaturen liegen, wie Abb. 6 zeigt, zwischen 376,9° und 482,4°. Der Punkt, der z. B. der Temperatur 400° entspricht, wird

in folgender Weise gefunden: Man trägt die Temperaturen der Geraden $z = 0$ in einem passenden Maßstab von dieser Geraden aus nach rechts auf (Abb. 7). In der z-Achse trägt man die Skala der gewählten Temperaturen der Isothermen auf und schneidet die Temperaturkurve durch eine Senkrechte auf dem Punkt 400°. Projiziert man den Schnittpunkt auf die Gerade $z = 0$ zurück, so erhält man den gesuchten Punkt für 400°. Diese projizierende Gerade gibt übrigens für alle zu r parallelen Geraden die Lage des Punktes an, der 400° entspricht.

Das Verfahren ist auf alle Geraden anzuwenden, in denen man Punkte der Isothermen zu bestimmen wünscht. Abb. 8 zeigt die nach diesem Verfahren ermittelten Isothermen. Die Flächen gleicher Temperatur im Zylinder sind Rotationsflächen, deren Schnitt mit einer beliebigen, durch die Zylinderachse gelegten Meridianebene das in Abb. 8 dargestellte Bild ergibt.

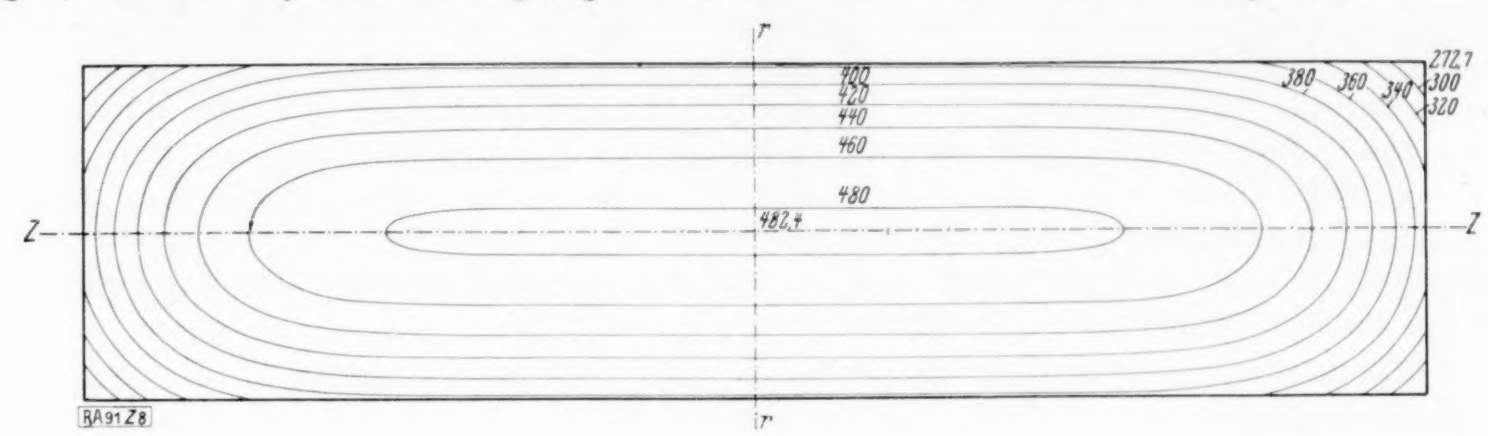


Abb. 8. Isothermen in einem achsialen Zylinderschnitt zur Zeit $t = 4$ sek.

2. Temperaturverlauf bestimmter Punkte des Zylinders in Abhängigkeit von der Zeit.

Die Gl. (17) ermöglicht es auch, die Temperatur bestimmter ausgewählter Punkte als Funktion der Zeit darzustellen. In diesem Falle sind die Koordinaten gegeben, und die Zeit t tritt als unabhängige Veränderliche auf. Um die Rechnung zu vereinfachen, empfiehlt es sich, für t fortlaufende Vielfache von 2 oder 3 zu wählen, weil dann das umständliche logarithmische Berechnen der e-Potenzen durch Quadrieren der früher berechneten Werte ersetzt werden kann. Dies ist um so mehr zulässig, als mit zunehmendem t die Änderung der Temperatur immer kleiner wird. Das hier vorgeführte Beispiel wurde mit den Werten von $t = 1, 2, 4, 8, 16$ und 32 sek berechnet, und zwar wurde der Schwerpunkt, der Durchstoßpunkt der z-Achse und ein Kantenpunkt auf ihren Temperaturverlauf untersucht. Abb. 9 zeigt das Rechnungsergebnis.

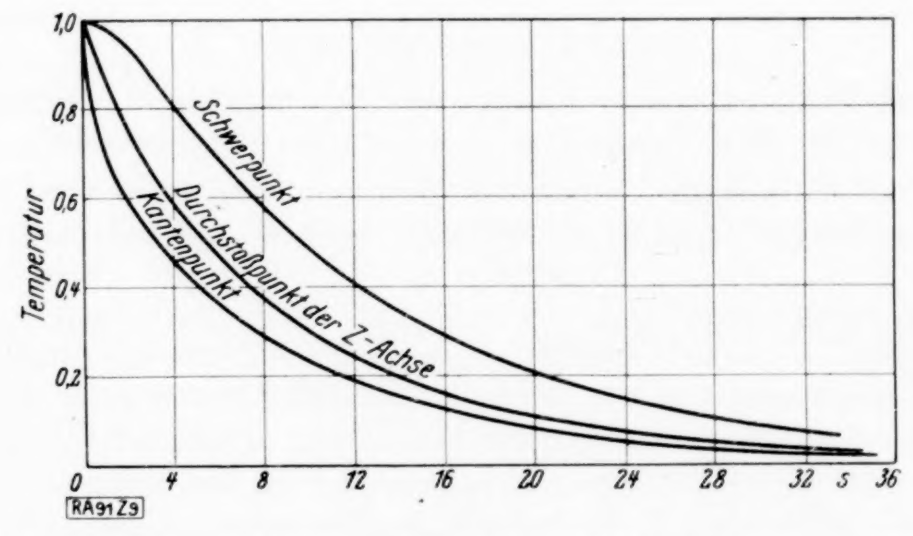


Abb. 9. Temperatur einzelner Punkte in Abhängigkeit von der Zeit.

Am einfachsten gestaltet sich die Rechnung für den Schwerpunkt, da für diesen $r = z = 0$ und daher $J_0(n_i r) = \cos q_i z = 1$ ist. Die Gl. (17) vereinfacht sich zu

$$\vartheta = \sum_1^\infty A_i\, e^{-n_i^2 at} \cdot \sum_1^\infty B_i\, e^{-q_i^2 at} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (46),$$

wie wir schon oben festgestellt haben. Hat man die Temperatur des Schwerpunktes berechnet, dann ist die Arbeit für alle übrigen Punkte sehr erleichtert, weil die Größen der Gl. (46) auch für die übrigen Punkte gelten und daher nur einmal berechnet werden müssen.

Beim Durchstoßpunkt der z-Achse ist $r = 0$, daher verschwindet die Bessel-Funktion in Gl. (17) und diese reduziert sich auf

$$\vartheta = \sum_1^\infty A_i\, e^{-n_i^2 at} \cdot \sum_1^\infty B_i\, e^{-q_i^2 at} \cos q_i z \quad \ldots \ldots \ldots \quad (45).$$

Auch diese Gleichung ist schon angegeben worden, wurde aber damals für konstantes t und veränderliches z verwendet.

Ein Kantenpunkt hat die Koordinaten $r = R$ und $z = \pm l$, wobei wegen der symmetrischen Lage aller Kantenpunkte für z nur ein Vorzeichen berücksichtigt zu werden braucht. Die Gl. (17) lautet dann:

$$\vartheta = \sum_1^\infty A_i e^{-n_i^2 at} J_0(n_i R) \cdot \sum_1^\infty B_i e^{-q_i^2 at} \cos q_i l \quad \ldots \ldots \quad (47).$$

Auch beim Zylinder erkennt man bereits ohne Rechnung, daß die Temperatur des Schwerpunktes am langsamsten, die eines Kantenpunktes am schnellsten abnehmen wird. Alle übrigen Punkte fallen bezüglich ihrer Temperaturabnahme zwischen die Kurven dieser beiden Punkte.

Es ist auch hier darauf hinzuweisen, daß für sehr kleine Werte von t die Berechnung der Temperatur dadurch unsicher wird, daß die Konvergenz der Reihen sich mit abnehmendem t verlangsamt. Man wird dadurch gezwungen, mit den i-Werten hinaufzugehen und alle Festwerte für größere Werte von i zu berechnen. Ob diese Rechenarbeit geleistet werden soll oder nicht, entscheidet der Zweck der Untersuchung. In den meisten Fällen kommt man mit einer geringen Zahl von i-Werten aus. Als Beispiel für die starke Konvergenz der auftretenden Reihen mit zunehmendem t sei angeführt, daß der Ausdruck

$$A_i e^{-n_i^2 at} J_0(n_i r)$$

für $t = 2$ sek ergibt:

i	$A_i e^{-n_i^2 at} J_0(n_i r)$
1	0,740917
2	0,004034
3	0,000003

während sich für $t = 8$ sek ergibt:

i	$A_i e^{-n_i^2 at} J_0(n_i r)$
1	0,450852
2	0,000009

Es kann also bereits das zweite Glied vernachlässigt werden. Bei systematischer Anlegung der Rechnung ist die durchzuführende Arbeit nicht besonders groß.

Zusammenfassung.

Es wird eine Anleitung zur Berechnung der Temperatur in einem Zylinder von endlicher Länge beim Abkühlen und Erwärmen gegeben für den Fall, daß

a) die Temperatur bestimmter Punkte zu einer gegebenen Zeit oder

b) der Temperaturverlauf bestimmter Punkte in Abhängigkeit von der Zeit angegeben werden soll.

Das Verfahren wird an einem Zahlenbeispiel erläutert.

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE

Selbstspannungen elastischer Gebilde[1].

Von *P. Neményi,* Berlin.
(Aus dem Institut für Technische Strömungsforschung, Technische Hochschule Berlin.)

1. Allgemeines. Man kann alle Spannungszustände der elastischen Körper in zwei Hauptgruppen einteilen: Solche, die durch aktuelle äußere Lasten (Oberflächen, oder Raumkräfte) verursacht werden, und solche, die ohne äußere Lasten bestehen. Letztere können ihren Ursprung entweder in der Vergangenheit des Körpers oder in gegenwärtigen physikalischen Einflüssen, in der Hauptsache Temperatureinflüssen, haben. Dementsprechend unterscheiden wir die beiden Hauptgruppen Lastspannungen und Eigenspannungen oder Selbstspannungen, und innerhalb der letzteren Gruppe „Werdegangsspannungen" und Wärme- oder Temperaturspannungen.

Während die Lastspannungen in der Literatur schon vielfach umfassende systematische Darstellung gefunden haben[2], fehlt es bisher an einer nach theoretischen Gesichtspunkten geordneten Übersicht über die weitverzweigten Untersuchungen auf dem Gebiete der Eigenspannungen. Die bisherige Entwicklung dieser Untersuchungen bietet kein einheitliches Bild. Vielmehr scheint es, daß die einzelnen Untersuchungen vielfach vollständig ohne Kenntnis anderer ganz eng verwandter durchgeführt wurden, und eine Klärung der Zusammenhänge zwischen den Sonderuntersuchungen ist bis jetzt noch kaum versucht worden.

Im Schrifttum der Baustatik sind seit langer Zeit einfache Sonderfälle von Werdegangsspannungen und Temperaturspannungen von elastischen Gebilden betrachtet worden. Die bei innerlich statisch unbestimmten Fachwerken vorkommenden Werdegangsspannungen haben ihren Ursprung meist in ungenauer Ablängung einzelner Stäbe. Bei sogenannten äußerlich statisch unbestimmten Gebilden können Werdegangsspannungen auch durch eingeprägte ungleichmäßige Lagersenkungen entstehen und auch diese Fälle sind schon mannigfach untersucht worden. — Ganz anders geartet sind jene Fälle von Werdegangsspannungen, die in den verschiedensten Zweigen der Metall- und Glas-Technologie seit langer Zeit bekannt und empirisch untersucht worden sind. Auch der Geologe und Geophysiker hat sich mit schwierigen Einzelproblemen von Selbstspannungen zu beschäftigen. Ebenso sind im technischen Schrifttum auch die Wärmespannungen an verschiedensten Stellen betrachtet worden.

In dem theoretischen Schrifttum der Elastizitätslehre sind schon seit den ersten Anfängen dieser Disziplin die Wärmespannungen in Betracht gezogen worden, ohne daß es bisher gelungen wäre, physikalisch völlig einwandfreie allgemeine Ansätze für das elasto-thermische Problem aufzustellen[3]. Dagegen wurden die Werdegangsspannungen erst von Love[4] und mit besonderem Nachdruck von A. Föppl[5] in die wissenschaftliche Darstellung der höheren Elastizitätstheorie hineinbezogen. Föppl war wohl der erste, der klar die Zweckmäßigkeit erkannte, die Wärmespannungen und die sonstigen Eigenspannungen unter einheitlichem Gesichtspunkt zusammenzufassen und den Sinn des Wortes „Eigenspannung" dementsprechend zu erweitern; er war auch der erste, der im Hinblick auf die Herstellungsspannungen die nötigen Einschränkungen an dem Eindeutigkeitssatz der Elastizitätstheorie ausdrücklich hervorhob. Gewisse Sondertypen der Zwängungsspannungen wurden allerdings schon von Weingarten und Volterra theoretisch behandelt und ein etwas allgemeiner Typ von Somigliana in die Elastizitätstheorie eingeführt. Die Volterraschen Zwängungsspannungen (sog. Distorsionsspannungen) können aber nur als adäquate allgemeine Darstellung der oben erwähnten, im Schrifttum der Baustatik behandelten einfachen Typen von Herstellungsspannungen betrachtet werden.

Das Anordnungsprinzip des vorliegenden Berichtes ist das Fortschreiten von den theoretisch einfachsten Typen zu den allgemeineren. Unter 2. werden die Volterraschen Distorsionen behandelt; unter 3. werden einige Beispiele und die Möglichkeiten für die experimentelle Nachprüfung der Theorie erörtert; unter 4. werden die Weingartenschen und Somiglianaschen Distorsionen erörtert, unter 5. wird über den allgemeinsten Typ von Werdegangs-

[1] Vorliegender Bericht ist eine wesentlich erweiterte Bearbeitung meines gleichbetitelten Referates in dem Handbuch der Physikalischen und Technischen Mechanik, herausgegeben von Prof. Dr. F. Auerbach und Prof. Dr. W. Hort. Verlag Joh. Ambr. Barth, Leipzig.

[2] Vgl. z. B. die Artikel von Müller-Timpe, Tedone, Tedone-Timpe in der Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften 4/4; das Referat von Trefftz im Handbuch der Physik: das Referat von Korn im Handbuch der Physikalischen und Technischen Mechanik (Bd. 3, S. 1).

[3] Vgl. hierüber A. Korn, a. a. O.

[4] Love, The Mathematical Theory of Elasticity, II. Aufl. Cambridge 1906. Love zählt zu den Eigenspannungen auch die durch Massenkräfte verursachten, soweit dieselben nicht von außenstehenden Körpern, sondern von verschiedenen Teilchen eines und desselben Körpers herrühren.

[5] Vorlesungen über Technische Mechanik, Bd. 5, S. 293.

spannungen mit alleiniger Einschränkung kleiner Verschiebungen berichtet; unter 6. die Werdegangsspannungen bei großen Verschiebungen behandelt, unter 7. die Wärmespannungen. Schließlich wird unter 8. versucht, zu zeigen, daß durch den Begriff der höheren Lastsingularitäten der Zusammenhang zwischen den Zwängungen und den Lastspannungen hergestellt wird.

2. Volterrasche Distorsionen. Ausgehend von einer hydrodynamischen Analogie und auf Grundlage einer grundlegenden Voruntersuchung von Weingarten[6]), ferner von Klein-Wieghardt[7]) hat Volterra[8]) folgende Frage untersucht: Kann in einem elastischen, von Oberflächen- und Massenkräften freien Körper ein Verzerrungszustand mitsamt ihren ersten und zweiten Ableitungen stetigen und eindeutigen Dehnungen (ε_x, ε_y, ε_z) und Gleitungen (γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz}) bestehen? Die Antwort auf diese Frage ist, daß dies nur bei mehrfach zusammenhängenden elastischen Körpern möglich ist.

Um dies zu beweisen und zugleich um die Natur der eben definierten Verzerrungszustände zu ergründen, hat Volterra die Verschiebungskomponenten u, v, w mit Hilfe von Linienintegralen der Verzerrungsgrößen ε_x usw., γ_{xy} usw., dargestellt. Die Untersuchung dieser Linienintegrale zeigt, daß sie dann und nur dann unabhängig von dem Integrationsweg sind, wenn die Saint-Venantschen Kompatibilitätsbedingungen befriedigt sind, und wenn der Körper einfach zusammenhängt. Bei mehrfach zusammenhängenden Körpern ergeben sich dagegen u, v, w trotz befriedigten Kompatibilitätsbedingungen im allgemeinen nicht unabhängig vom Integrationsweg, also als polydrome Funktionen des Ortes.

Eine vereinfachte Darstellung dieser Integralformeln gab Cesàro[9]), und auf Grund derselben hat er die Volterrasche Fragestellung auf nichteuklidische Räume verallgemeinert. Das Problem, das Verschiebungsfeld aus charakteristischen Größen des Verzerrungsfeldes darzustellen, hat später Giuganino[10]) wieder aufgegriffen, und in einer ganz anderen Weise gelöst. Er geht von der Tatsache aus, daß die drei Komponenten ϱ_{xy}, ϱ_{xz}, ϱ_{yz} der Rotation des Verschiebungsfeldes polydrom sein können, auch wenn die Verzerrungskomponenten $\varepsilon_x, \ldots$, $\gamma_{xy} \ldots$ eindeutig sind. In der Vieldeutigkeit des Rotorfeldes steckt im wesentlichen die Vieldeutigkeit des Verschiebungsfeldes u, v, w. Giuganino hat gezeigt, daß u, v, w sich aus den drei Komponenten von ϱ und aus drei harmonischen Funktionen P, Q, R, die auf Grund der Körperform bestimmt werden können, ganz ähnlich aufbauen lassen, wie das Verschiebungsfeld u, v, w eines starren Körpers sich aus den sechs Schraubungskomponenten aufbauen läßt.

Aus dem obigen grundlegenden Volterra-Cesàroschen Satz kann man folgern, daß ein elastischer Körper von einfach zusammenhängender Gestalt, wenn er von Lasten frei ist, sich in natürlichem Zustande befinden muß, falls die Verzerrungen regulär sind, wogegen in einem mehrfach zusammenhängenden Körper auch bei regulären Verzerrungen lastfreie Spannungszustände möglich sind.

Volterra hat ferner gezeigt, daß das so definierte polydrome Verschiebungsfeld sich in jedem Falle durch eine Diskontinuität darstellen läßt, die in den Raumkoordinaten ausgedrückt, linearer Natur ist. Das Verschiebungsfeld läßt sich daher physikalisch auch so herstellen, daß der Körper durch eine entsprechende Anzahl Schnitte in einen einfach zusammenhängenden verwandelt wird, die Schnitte gegeneinander beliebigen Schraubungen unterworfen werden und dann der mehrfache Zusammenhang, — nach Ausfüllung der Zwischenräume durch fremdes und nach Entfernung des überflüssigen Materials, — durch Schweißen wieder hergestellt wird. Diese Manipulationen nennt Volterra Distorsionen, die daraus entstehenden Spannungen Distorsionsspannungen. Auch als Herstellungsspannungen lassen sich diese Spannungen leicht deuten. Denken wir nämlich den Körper aus einem einfach zusammenhängenden Körper hergestellt, dessen Anschlußflächen ihrer Form nach genau miteinander übereinstimmen, ihrer Lage nach aber Unstimmigkeiten aufweisen, dann kann die gewünschte Passung nur durch Zwängungen erreicht werden, die eben einen mit den Volterraschen Distorsionsspannungen identischen Spannungszustand bedingen. (Äußerlich wird allerdings der Körper die bei Volterra vorkommenden charakteristischen Diskontinuitätseigenschaften bei dieser Entstehung der Eigenspannungen nicht aufweisen.)

Volterra zeigt, daß für diese Zwängungen eine dem Maxwellschen Satze analoge Gegenseitigkeitsbeziehung besteht. Betrachten wir nämlich zwei beliebige Schnitte durch den mehrfach zusammenhängenden Körper, und verlegen wir die beiden Schraubungen, die

[6]) Weingarten, Atti della reale academia dei Lincei. Rendiconti Classe di scienze fisiche matematiche e naturali (im folgenden zitiert mit „Lincei") (5). 10_1. 1901.

[7]) F. Klein und K. Wieghardt, Über Spannungsflächen und reziproke Diagramme, Archiv d. Mathematik u. Physik 8, S. 1, 1904.

[8]) Volterra, Annales de l'École normale supérieure (3). 24. 400. 1907. Diese umfangreiche Abhandlung ist die erweiterte Zusammenfassung früherer Schriften von Volterra. Siehe Lincei (5). 14_1. S. 127, 193, 351, 431, 641; 14_2. S. 329; Nuov. Cim. (5). 10. S. 361.

[9]) Cesàro, Sulle formole del Volterra fondamentali nella teoria delle distostioni elastiche. Atti della R. Academia delle scienze fis. e. mat. di Napoli (3). 12. 1906, S. 311.

[10]) Giuganino, Alcune formole analoghe a quelle del Volterra nella teoria delle distorsioni elastiche. Lincei (5). 20_1.

an diesen Schnitten angebracht, den Körper in Distorsionen versetzen können, in ihre sechs Komponenten. Wenn man nun die resultierenden Dynamen der in den beiden betrachteten Schnittflächen entstehenden Spannungen ebenfalls in Komponenten zerlegt denkt und die einander entsprechenden Schraubungs- bzw. Spannungsdynamenkomponenten mit demselben Buchstaben bezeichnet, dann kann man aussagen, daß die am Querschnitt α angebrachte Schraubungskomponente r im Querschnitt β eine ebenso große Spannungsdynamenkomponente S veranlaßt wie die von der am Querschnitt β angebrachten Schraubungskomponente s im Querschnitt α veranlaßte Spannungsdynamenkomponente R.

Colonnetti[11]) hat ebenfalls auf Grund von Arbeitsbetrachtungen eine andere allgemeine Reziprozitätsbeziehung gefunden, und zwar zwischen Lastspannungszuständen und Selbstspannungszuständen: Die Produktensumme aus den sechs Komponenten der resultierenden Dyname der Querschnittsspannungen aus einer Gruppe äußerer Lasten mit den entsprechenden Komponenten einer gegebenen Distorsionsschraubung ist entgegengesetzt gleich mit der Arbeit der äußeren Kräfte längs den Verschiebungswegen, die durch diese Distorsion verursacht werden. Verschiedene Sonderfälle dieses bemerkenswerten Satzes sind in der Baustatik schon viel früher bekannt gewesen[12]); Colonnettis Verdienst ist nur die allgemeine Fassung und einwandfreie Beweisführung.

Ein anderes wichtiges Resultat der energetischen Baustatik der Distorsionen ist die Erweiterung des Castiglianoschen Satzes über das Minimum der Formänderungsarbeit auf die Distorsionen, die ebenfalls von Colonnetti[13]) durchgeführt wurde.

Man muß dem Castigilanoschen Arbeitsausdruck nur eine zweite Arbeitsgröße, die von Colonnetti symbolisch als „Formänderungsarbeit der eingeprägten Verzerrungen" bezeichnet wird, hinzufügen; das Wesen dieses Satzes werden wir an Hand einer Spezialisierung noch näher kennen lernen.

Von dem Volterraschen Gegenseitigkeitssatz ausgehend, lassen sich auch direkte Zusammenhänge zwischen dem Spannungs- und Verschiebungsfeld bei Distorsionen ableiten. Volterra und Colonnetti[14]) haben diese Frage für ebene Distorsionen beliebiger in bezug auf eine Ebene symmetrischer Körper gelöst. Wenn man solche Distorsionen betrachtet, so ist es offenbar, daß die Distorsion durch eine reine Drehung gekennzeichnet werden kann. Der zugehörige Spannungszustand in jedem Querschnitt kann durch ihre resultierende Kraft gekennzeichnet werden. Auf diese Weise kann man bei einem zweifach zusammenhängenden ebenen System jedem Punkt eine Gerade eindeutig reziprok zuordnen. Ein n-fach zusammenhängender Körper legt $n-1$ solche reziproke Zuordnungen fest. Das Studium dieser Reziprozitäten ergibt nun das bemerkenswerte Resultat, daß es in jeder Reziprozität zwei zueinander senkrechte Richtungen gibt, die dadurch ausgezeichnet sind, daß einer reinen Verschiebung in der einen Richtung eine Kraft in der anderen gehört und umgekehrt.

3. Sonderfälle Volterrascher Distorsionen. Den einfachsten Sonderfall der Volterraschen Distorsionen hat Volterra selbst gegeben[8]), er hat nämlich das Distorsionsproblem für einen durch zwei konzentrische Kreiszylinder und zwei dazu senkrechte Ebenen begrenzten Ringkörper gelöst. Er betrachtet die sechs elementaren Distorsionen, wobei er das Bezugsachsensystem durch die Mitte des Körpers wählt. Die Lösung führt er immer in zwei Teilen aus: der erste Teil besteht im Aufsuchen eines solchen Spannungssystems, das überall regulär ist, das in der radialen Schnittfläche, die der betreffenden Elementardistorsion entsprechende Diskontinuität der Verschiebungen liefert und die Mantelflächen der Zylinder spannungsfrei läßt. Als zweiten Schritt ermittelt er sodann die aus diesem System sich ergebenden Kräfte an den Zylindergrundflächen, und lagert über das erste ermittelte Spannungsfeld ein zweites, welches entgegengesetzt gleiche Grundflächenkräfte liefert. Die erste Teillösung gelingt in geschlossener Form mit den üblichen Funktionszeichen, wogegen die zweite Teillösung bei einzelnen Elementardistorsionen nur schätzungsweise gelingt. Der ebene Teil dieses Problems ist unabhängig, und zwar vor Erscheinen der allgemeinen Theorie von Volterra durch Timpe[15]) gelöst worden. Alle Resultate sind von Volterra an Kautschuk-Modellen nachgeprüft worden. Auch die Prüfung der Spannungsfelder ließ sich durchführen. Zu diesem Zwecke haben Rolla, ferner Corbino und Trabacchi[16]) aus durchsichtiger, aus Fischleim

---

[11]) Colonnetti, Su di una reciprocita fra deformazioni e distorsiioni. Lincei 24_1 (1915).

[12]) Vgl. z. B. Ritter, Anwendungen der graphischen Statik, 3. Teil, Zürich 1900.

[13]) Colonnetti, Sul problema delle coazioni elastiche. Torino Atti 54 (1918—19), S. 864.

[14]) Colonnetti, Sulle distorsioni dei sistemi elastici piani più volte connessi, Lincei 24_1, 1915.

[15]) Timpe, Probleme der Spannungsverteilung in ebenen Systemen, einfach gelöst mit Hilfe der Airyschen Funktion. Diss. Göttingen 1905.

[16]) O. M. Corbino, Le tensioni create in un corpo elastico dalle distorsioni di Volterra e la conseguente doppia rifrazione accidentale. Lincei (5). 18. 437. 1909. — G. C. Trabacchi, I. fenomeni di doppia rifrazione accidentale prodotti dalle tensioni create in un corpo elastico dalle distorsioni di Volterra. Lincei (5). 18. 444. 1909. — Vgl. auch Volterra, 3 Vorlesungen über neuere Fortschritte der mathematischen Physik. Deutsch von C. Lamla. Leipzig und Berlin 1914, S. 142 u. f., wo auch ein kurzgefaßter Abriß der Volterraschen Distorsionstheorie gegeben wird.

hergestellter Gelatine Modelle verfertigt und diese durch die sechs elementaren Volterraschen Zwängungen in Spannungen versetzt. Die Durchleuchtung der Zylinder mit polarisiertem Licht nach dem Vorgange von W. König ergibt dunkle Linien, die sich auch theoretisch errechnen lassen. Der Versuch hat die Theorie außerordentlich gut bestätigt.

Der schwierige Sonderfall des durch zwei konfokale Ellipsen begrenzten ebenen Gebietes ist von Timpe mit Hilfe trigonometrischer und hyperbolischer Funktionen gelöst worden[17]).

Einen viel allgemeineren Fall der Volterraschen Distorsionen hat Almansi[18]) behandelt. Er betrachtet mehrfach zusammenhängende zylindrische Körper von ganz beliebigem Querschnitt und führt die Lösung des Problems in aller Allgemeinheit auf die Bestimmung von biharmonischen Spannungsfunktionen (für jede elementare Distorsion 3) von nur 2 veränderlichen x, y (Koordinaten in der Querschnittsebene) zurück. Die Lösung ist mit der Behandlung ebener Formänderungsaufgaben mit Hilfe der Airyschen Spannungsfunktion analog, obwohl hier das zu lösende Problem sich nicht auf die ebenen Distorsionen beschränkt. Die Untersuchungen von Almansi sind von E. Freda[19]) auf einen zylindrischen Körper mit exzentrischem Kreisringquerschnitt angewendet worden. Er führt den exzentrischen Kreisring mit Hilfe einer passenden Spiegelung am Einheitskreis auf einen zentrischen zurück.

Dasselbe, was Almansi für zylindrische Körper geleistet hat, hat Laura[20]) für Umdrehungskörper durchgeführt. Dieses ebenfalls an sich dreidimensionale Problem wird vom Verfasser auf ein System von simultanen Differentialgleichungen mit nur zwei veränderlichen r, z (Koordinaten der Meridianebene) zurückgeführt. Wenn man nun aus dem Umdrehungskörper mit Hilfe zweier Meridianschnitte einen Teil herausschneidet, so erlaubt diese Theorie den Spannungszustand dieses gekrümmten Stabes für beliebige an den Endquerschnitten angreifende Kräfte und Momente zu ermitteln; die Laurasche Theorie läßt sich somit auch zu einer Verallgemeinerung der Saint-Venantschen Theorie des Stabes auf kreisförmig gekrümmte Stäbe mit beliebigem Querschnitt und Zentriwinkel ausbauen.

Volterra hat noch einen wichtigen Sonderfall bzw. Grenzfall seiner Theorie mitgeteilt: Nämlich die Zwängungen von aus dünnen Stäben mit steifen Eckanschlüssen gebildeten rahmenartigen Gebilden. Er nennt dieses System: Zyklisches Gebilde aus biegsamen Elementen. Sie stellen eine theoretische Verallgemeinerung der in der Baustatik behandelten Rahmenwerke dar, für welche auch Zwängungsspannungen gelegentlich behandelt wurden. Volterras Lösung bietet sich in Form eines linearen Gleichungssystems dar, ebenso wie bei den erwähnten Sonderproblemen in der Baustatik. Außerordentlich bemerkenswert ist aber, daß bei der von Volterra gegebenen Darstellungsweise sich eine enge Analogie mit den Kirchhoffschen Gleichungen über die Verteilung elektrischer Ströme in einem System von Drähten, die ein Netz bilden, zeigt. Jeder Gleichung des Kirchhoffschen Gleichungssystems entsprechen sechs Gleichungen im Gleichungssystem von Volterra. Der elektrischen Stromstärke in einem Querschnitte entspricht die resultierende Dyname der Spannungen eines Stabquerschnittes (bzw. die sechs Komponenten dieser Dyname) dem Potential in den Knotenpunkten des Kirchhoffschen Netzes entspricht die Schraubungsdyname eines Volterraschen Knotenpunkts (bzw. die sechs Komponenten derselben), schließlich den elektromotorischen Kräften die Charakteristiken der Distorsionen; dem reziproken Wert der Ohmschen Widerstände entsprechen die elastischen Stabkonstanten.

Das ideale Stabwerk (Fachwerk) läßt sich als ein Gegenstück des Volterraschen Rahmenwerkes auffassen. Für diesen einfachen Fall sind die Zwängungsspannungen, u. a. von Zschetsche[21]) behandelt worden, und für diesen Fall hat er die Gesetzmäßigheit der Gegenseitigkeit der Zwängungen unabhängig von Volterra nachgewiesen. Für diesen Fall erhält der schon oben erörterte verallgemeinerte Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit eine besonders einfache Gestalt: Es müssen die statisch unbestimmten Größen aus der Bedingung bestimmt werden, daß die Arbeitsgröße

$$\sum \left[\frac{S^2\, l}{E\, F} + S\,\Delta\, l\right]$$

ein Minimum wird. Hierin ist das zweite Glied, die „Arbeit der eingeprägten Verzerrungen" [22]). Colonnetti hat diesen Zusammenhang auf das Studium der Montagespannungen in den Holmen eines Zweideckerflügels angewendet[23]). Er hat die außerordentlich große Bedeutung der

[17]) Timpe, Die Airysche Funktion für den Ellipsenring, Mathematische Zeitschrift 17. S. 189, 1923.

[18]) Almansi, Sopra una classe particolare di deformazione a spostamenti polidromi dei solidi cilindrici. Lincei (5). 161. S. 26. — Almansi, Sulla deformazioni a spostamenti polidromi de solidi cilindrici. Lombardo instituto rendi conti (2). 40. S. 937.

[19]) Freda, Sulle distorsioni di un cilindro elastico due volte connesso. Lincei (5). 25_1. S. 582 u. 679, 1916.

[20]) Laura, Sopra le deformazioni per distorsioni dei solidi elastici isotropi di revoluzione. Nuov. Cim. (6). 7. 1914.

[21]) Zschetsche, Handbuch der Baustatik, Bd. I, Düsseldorf 1912, S. 490.

[22]) Colonnetti, Aplicazione a Problemi tecnici di un nuovo teorema sulle coazioni elastiche. Atti di Torino 54, S. 69, 1918/19.

[23]) Colonnetti, Sforzi di montaggio nell armatura dell, ala di un biplano. 54, S. 426, 1918/19.

Selbstspannungen nachgewiesen und Wege gezeigt, dieselben zur wirtschaftlichen Anordnung nutzbar zu machen.

Klein und Pfeifer[24]) haben die Selbstspannungen von idealen Fachwerken vom Standpunkte der Geometrie mit Hilfe der Maxwellschen Polyeder untersucht und auf interessante topologische Zusammenhänge hingewiesen.

An dieser Stelle mag noch die Erklärung dafür gegeben werden, warum sich ideale Fachwerke mit überzähligen Stäben in bezug auf Selbstspannungen ebenso verhalten, wie mehrfach zusammenhängende Körper. Während sich nämlich die Rahmengebilde mit steifen Ecken völlig zwanglos als Sonder- bzw. Grenzfälle der mehrfach zusammenhängenden Körper darstellen, ist es zunächst rein geometrisch gar nicht einzusehen, warum sich ein statisch bestimmtes ideales Fachwerk oder Scheibenwerk als einfach, ein statisch unbestimmtes als mehrfach zusammenhängend verhalten soll. Eine einfache geometrisch-kinematische Betrachtung klärt uns über diese Frage auf:

Denken wir uns unser Fachwerk oder Scheibenwerk mit Hilfe der Stützungsglieder mit der Erdscheibe zu einem einzigen Scheibenwerk vereinigt; wir können somit unsere Betrachtung auf freie (ungestützte) Körper beschränken. Bezeichnen wir als einen „Schnitt" eine Materialzertrennung längs eines ebenen Flächenstücks, dessen Rand ganz der Oberfläche des Körpers angehört. Ein einfach zusammenhängender Körper wird durch einen solchen Schnitt in zwei gesonderte Teile zerlegt, während dies bei einem mehrfach zusammenhängenden nicht der Fall ist, oder: kinematisch gesprochen, wenn wir unseren Körper starr denken, haben bei einfachem Zusammenhang die beiden Ufer des Schnittes gegeneinander sechs Freiheitsgrade, bei mehrfachem Zusammenhang keinen Freiheitsgrad. Wenn man nun bei einem idealen Stab- oder Scheibenwerk dieselbe Überlegung anstellt, dann sieht man, daß in dem statisch unbestimmten Fall ein Schnitt — (von den losen Stabstümpfen abgesehen) — keine relative Bewegungsfreiheit gibt, wogegen im statisch bestimmten Fall durch den Schnitt ein Freiheitsgrad entsteht.

In bemerkenswert fruchtbarer Weise hat Zimmermann[25]) gewisse fingierte Zwängungen, lange vor der allgemeinen Theorie von Volterra, bei der Behandlung des elastisch gebetteten Stabes als Hilfsmittel zur Zurückführung des Stabes mit endlicher Länge auf den unendlich langen Stab herangezogen.

4. Weingartensche und Somiglianasche Distorsionen. Weingartens Fragestellung[6]), die den Ausgangspunkt der ganzen Distorsionstheorie gebildet hat, war etwas allgemeiner als jene, die von Volterra ausführlich untersucht wurde. Weingarten fragt nämlich, unter welchen Bedingungen in einem elastischen Körper, der frei von äußeren Lasten ist, ein Spannungs- und Verzerrungssystem (ε_x . ., γ_{xy} . .) entstehen kann, das überall stetig ist; stetige erste und zweite Ableitungen der Verzerrungsgrößen werden also nicht gefordert. Die Antwort auf diese Frage ist die folgende: In einem einfach zusammenhängenden Körper kann ein solches Verzerrungssystem nur dann zustande kommen, wenn das Verschiebungsfeld u, v, w eine Diskontinuitätsfläche S besitzt, mit folgenden Eigenschaften: Die Diskontinuität muß so beschaffen sein, daß sie entweder überall auf S senkrecht steht, oder aber so, daß sie S in eine auf S abwickelbare unendlich nahe Fläche S' überführt, wobei der Rand von S und S' eine gemeinsame asymptotische Linie beider Flächen bildet. Ist der Körper mehrfach zusammenhängend, so entspricht den gestellten Bedingungen außer diesem Typ von Diskontinuitätsflächen offenbar auch noch der unter 2. erörterte Volterrasche Typ. Die eingehende Untersuchung der Weingartenschen Distorsionen ist von Somigliama[26]) durchgeführt worden, der auch ein Beispiel von Weingartenschen Distorsionen gezeigt hat, das sich in Volterras Typ nicht einordnen läßt.

Somigliana geht aber in seiner Untersuchung von 1914 noch um einen Schritt weiter: Er unterwirft die Diskontinuitätsschicht SS' des Verschiebungsfeldes keinerlei anderen Einschränkung, als daß die Diskontinuitäten sehr klein (unendlich klein) sein sollen. Dann werden, wie Somigliana zeigt, die Spannungsgrößen σ_x usw. und die Verzerrungsgrößen ε_x usw. trotzdem im ganzen Körper regulär bleiben, nur an der Diskontinuitätsschicht erfährt das Verzerrungsfeld eine sprunghafte Änderung. Wenn u_S, v_S, w_S die Diskontinuitäten des Verschiebungsvektors in einem Punkte von S bedeuten, bezogen auf ein Achsenkreuz, dessen x-, y-Achse in die Tangentenebene von S fallen, z-Achse aber darauf senkrecht steht, dann sind die Sprünge der sechs auf dasselbe Achsenkreuz bezogenen Verzerrungskomponenten ε_x . ., γ_{xy} . . durch folgende Formeln ausgedrückt:

---

[24]) F. Klein, Selbstspannungen elastischer Diagramme. Mathematische Annalen 67, S. 433, 1909. — Pfeifer, Zeitschrift für Mathematik und Physik 58, 1909.

[25]) Zimmermann, Die Berechnung des Eisenbahnoberbaues. Berlin 1888. — Infolge der elastischen Bettung verhält sich der an sich einfach zusammenhängende Stab ähnlich wie ein zweifach zusammenhängender. (Siehe die Bemerkungen über statisch unbestimmte Scheibenwerke im Text.)

[26]) Somigliana, Mathematiker-Kongreß von Rom, Bd. III. — Somigliana, Sulla teoria delle distorsioni elastichi I u. II. Lincei (5). 23_1, S. 463, 1914 und 24_1, S. 655, 1915.

$$[\varepsilon_x]_S = \frac{\partial u_S}{\partial x}, \quad [\varepsilon_y]_S = \frac{\partial v_S}{\partial y}, \quad [\varepsilon_z]_S = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\left(\frac{\partial u_S}{\partial x} + \frac{\partial v_S}{\partial y}\right);$$

$$[\gamma_{xy}]_S = \frac{\partial u_S}{\partial y} + \frac{\partial v_S}{\partial x}, \quad [\gamma_{xz}]_S = 0, \quad [\gamma_{yz}]_S = 0.$$

Aus diesen Formeln, an denen zunächst auffällt, daß w_S gar nicht vorkommt, lassen sich unschwer die oben mitgeteilten Eigenschaften herauslesen, denen u_S, v_S, w_S genügen müssen, wenn die Somigliana-Distorsion zugleich eine Weingartensche sein soll[27]).

Diese auch vom geometrischen Standpunkte aus bemerkenswerte Diskontinuitätsuntersuchung wurde von Maggi[28]) auf die Ableitungen von ε_x usw. erweitert, wobei es ihm zugleich gelang, sich von dem natürlichen Koordinatensystem freizumachen, also die Resultate auf ein beliebiges festes Achsenkreuz x, y, z zu beziehen.

Somigliana[29]) gelang es, die Bestimmung des Spannungs- und Verzerrungszustandes eines einer ganz beliebigen Distorsion unterworfenen Körpers auf folgende Weise prinzipiell durchzuführen: Das gesuchte Verschiebungsfeld u, v, w wird aus zwei Teilen zusammengesetzt. Der erste Teil U, V, W soll im Unendlichen verschwinden, überall regulär sein, bis auf S, wo er die vorgeschriebenen Diskontinuitäten aufweisen soll. Der hierdurch eindeutig definierte Verschiebungszustand U, V, W wird auf Grund der biharmonischen Verallgemeinerung der Potentialtheorie der Doppelschichte erhalten. Der Restteil u_1, v_1, w_1 muß dann offenbar der Bedingung genügen, daß sie überall, auch auf S regulär ist und auf der Oberfläche des Körpers, die zu U, V, W gehörigen Oberflächenspannungen zunichte macht; diese zweite Teillösung fordert somit die Lösung einer zweiten Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie.

Bemerkenswert ist die von Somigliana gegebene hydrodynamische Analogie seiner Distorsionen: In einem geschlossenen Raume R mit starren Wänden befindet sich eine mit stationären Doppelquellen von zur Fläche senkrechter Richtung belegte feste Fläche S; gesucht wird die entstehende stationäre wirbelfreie Bewegung. Die Analogie ist naturgemäß nur eine rein qualitative.

5. Allgemeiner Typ von Werdegangsspannungen. Während die unter 2., 3. und 4. behandelten Selbstspannungen durch örtlich auf bestimmte Schnittflächen beschränkte Unstimmigkeiten zurückgeführt werden, oder wenigstens durch solche Unstimmigkeiten entstanden gedacht werden können, sind die hier zu behandelnden Eigenspannungen insofern allgemeinerer Art, als die Unstimmigkeiten sich nicht flächenhaft verteilen, sondern räumlich im ganzen Körper oder in einem Teil von demselben verteilt sind. Bei dem bereits unter 1. erwähnten Gießvorgang entsteht z. B. die Unstimmigkeit dadurch, daß infolge der ungleichmäßigen Abkühlung einzelne Teile schon früher in den elastisch festen Zustand übergegangen sind und dann den Rest an den mit dem Erstarren verbundenen Formänderungen hindern. Auch bei fast allen anderen technologischen Herstellungsverfahren kommen derartige Eigenspannungen vor, z. B. beim Schmieden. Bei den Betonbauten entspricht diesen Vorgängen der Schwund beim ungleichmäßigen Abbinden. Auch die Nachbehandlung kann zu ganz ähnlichen Selbstspannungen Anlaß geben, und ebenso auch die durch Überbeanspruchung veranlaßte teilweise Plastizierung des Körpers. In letzterem Falle nennt man die Eigenspannungen meistens „Nachspannungen".

Reißner[30]) hat indessen im Rahmen einer grundsätzlichen generellen Untersuchung des Selbstspannungsproblems gezeigt, daß auch die Distorsionsspannungsfelder aus kontinuierlich verteilten Unstimmigkeiten erzeugt gedacht werden können. Die Unstimmigkeitsverteilung oder, wie sich Reißner ausdrückt, die Verteilung der Eigenspannungsquellen ist nämlich bei einem ganz bestimmten Selbstspannungszustand unendlich vieldeutig. Die Distorsionen zeichnen sich somit gegen andere Selbstspannungszustände dadurch aus, daß bei ersteren unter der Mannigfaltigkeit der möglichen Eigenspannungsquellensysteme auch auf einzelne Flächen konzentrierte vorkommen. Reißner hat u. a. auch einfache Anweisungen gegeben, wie man zu einem gegebenen Selbstspannungszustand einige kontinuierliche Eigenspannungsquellverteilungen besonders einfacher Art ermitteln kann.

Mathematisch gesprochen liegt der Unterschied zwischen den allgemeinen Selbstspannungen und den oben behandelten Zwängungen auch darin, daß, während dort die Saint-Venantschen Verträglichkeitsbedingungen zwischen den Verzerrungsgrößen $\varepsilon_x \ldots$, $\gamma_{xy} \ldots$ im ganzen Körper höchstens mit Ausnahme einer Fläche durchwegs befriedigt sind, diese Be-

[27]) Somigliana hat durch diese Überlegung einen Fehler in der rein geometrisch durchgeführten Untersuchung von Weingarten berichtigt.

[28]) Maggi, Calcolo delle discontinuità delle derivate di ordine superiore dello spostamento d'equilibrio elastico. Lincei (5). 30_2, S. 71, 1921.

[29]) Somigliana, a. a. O. Abhandlung II.

[30]) Reißner, Eigenspannungen und Eigenspannungsquellen. Diese Zeitschrift, dieses Heft, S. 1.

dingungen bei den hier behandelten allgemeinen Selbstspannungszuständen im ganzen Körper oder in einem räumlich ausgedehnten Teil desselben ungültig sind[31]).

Föppl[32]) zeigt in seiner klassischen Darstellung dieses Gegenstandes, daß der Satz über das Minimum der Formänderungsarbeit bei variiertem Verzerrungszustand auch für die Eigenspannungen gültig bleibt. Dagegen verliert der Satz von dem Minimum der Formänderungsarbeit bei variiertem Spannungszustand zunächst seine Gültigkeit. Colonnetti[33]) hat aber auch für den hier vorliegenden allgemeinsten Fall das Ergänzungsglied „Formänderungsarbeit der eingeprägten Verzerrungen" definiert, welches, zu dem Formänderungsausdruck hinzugefügt, die Minimumeigenschaft desselben sichert.

Föppl hat gezeigt, daß der Elastizitätstheorie außer den aus der Gleichgewichtsbedingung der inneren Spannungen und aus dem Elastizitätsgesetz unmittelbar folgende Gleichungen:

$$2\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon_x + \frac{e}{m-2}\right) + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$2\frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon_y + \frac{e}{m-2}\right) + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z} = 0$$

$$2\frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon_z + \frac{e}{m-2}\right) + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y} = 0$$

und außer den Randbedingungen keine weiteren unabhängigen Gleichungen zur Lösung der Randwertaufgabe zur Verfügung stehen, so daß das Problem unbestimmt ist und ohne besondere physikalische Annahmen über den Entstehungsvorgang des Selbstspannungszustandes gar nicht gelöst werden kann, was übrigens nach der Definition dieser Spannungszustände gar nicht anders zu erwarten ist.

Trotzdem lassen sich gewisse allgemeine Eigenschaften des Verzerrungs- und Spannungsfeldes zeigen. Colonnetti[34]) benutzt das Bettische Reziprozitätstheorem, um solche Eigenschaften abzuleiten. Das eine Verzerrungssystem ist das zu untersuchende, als zweites Verzerrungssystem wählt er zunächst eine homogene Deformation. Er beweist hieraus, daß das Gesamtvolumen des durch Eigenspannungen beanspruchten Körpers genau so groß ist wie im natürlichen Zustand. Diesen Satz hat Föppl für den Sonderfall der Gußspannungen in einer Kugel schon vermutungsweise ausgesprochen. Wählt er ferner als zweites Verzerrungssystem eine Volterrasche Distorsion, so kommt er zu folgendem Resultat: Die resultierende Kraft und das resultierende Moment der in den Schnitten übertragenen allgemeinen Eigenspannungen können berechnet werden, wenn die Verschiebungen der Punkte der Schnittfläche, die bei der Zerschneidung und damit verbundener Entspannung auftreten, experimentell bestimmt werden, und wenn andererseits der von der Volterra-Distorsion veranlaßte Spannungszustand bekannt ist[35]) [36]).

Da, wie aus obigem hervorgeht, mangels Kenntnis des Werdeganges des zu untersuchenden elastischen Körpers im allgemeinen nur das Zerschneiden desselben genügenden Aufschluß über seinen Selbstspannungszustand geben kann[37]), so wäre die gründliche Kenntnis der Unstimmigkeitsverhältnisse bei den Herstellungsvorgängen von größter Bedeutung. Die Grundlagen zu dieser Erkenntnis sind in der technologischen Literatur zerstreut, und auch einzelne abgeschlossene Untersuchungen über Eigenspannungen finden wir im technologischen Schrifttum.

Allgemeines über die physikalischen Bedingungen, unter welchen Eigenspannungen entstehen bzw. über die Wege der Herabsetzung derselben, finden wir z. B. bei Martens und Hein: Materialkunde[38]). Eine eingehende Untersuchung sowohl der physikalischen als auch der mathematischen Seite der Gußspannungsfrage hat Steiger[39]) gegeben. Der schon von Föppl kurz behandelte Fall der Gußspannungen in einer Kugel sowie die Gußspannungen

[31]) Colonnetti, Su certi stati di coazione elastica che non dipendono da azioni esterne. Lincei (5). 26_2. S. 43, 1917.

[32]) Föppl, a. a. O.

[33]) Colonnetti, Per una teoria generale delle coazioni elastiche. Torino atti 56. S. 188, 1921.

[34]) Colonnetti, Una proprieta caracteristica delle coazioni elastiche nei solidi elasticamente omogenei. Lincei (5) 27_2 S. 155. 1918; Sul problema delle coazioni elastiche. Lincei (5) 27_2. S. 267, 331. 1918.

[35]) und [36]) Weitere allgemeine Sätze bzw. Betrachtungen findet man bei Masing, „Zur Theorie der Wärmespannungen", Zeitschr. für Technische Physik 3. S. 167. 1922 (wobei unter Wärmespannungen Spannungen aus dauernden Formänderungen infolge Wärmebehandlung und nicht Temperaturspannungen gemeint sind), ferner bei M. v. Laue „Über die Eigenspannungen in planparallelen Glasplatten und ihre Änderung beim Zerschneiden", Zeitschr. für Technische Physik 11. S. 385 ff. 1930.

[37]) Im Ausnahmefall („elastisch unbestimmte Gebilde") kann ein Belastungsversuch Aufschluß über die Selbstspannungen geben.

[38]) Martens und Hein, Materialkunde. Bd. IIa. Berlin 1912.

[39]) R. v. Steiger, Über Gußspannungen. Dissertation. Zürich 1913.

in zylindrischen Körpern wurden, in engem Zusammenhang mit Fragen der Temperaturspannung, von Honegger[40]) untersucht, der bis zur zahlenmäßigen und graphischen Auswertung seiner Näherungstheorie vorgedrungen ist.

In einer anderen Arbeit[40a]) hat Honegger den Selbstspannungszustand untersucht, der durch teilweise Überschreitung der Elastizitätsgrenze bei rascher Rotation entsteht, und hat auf die praktische Anwendbarkeit einer solchen vorübergehenden Überbeanspruchung zur Erhöhung der Gebrauchsfestigkeit hingewiesen. Technisch wichtig sind ferner die bei der Schweißverbindung von Stahlplatten entstehenden Selbstspannungen (sog. Schrumpfspannungen)[40b]).

Zum Schluß kehren wir zu allgemeinen Fragestellungen zurück, die uns zu den Fragen des nächsten Abschnittes hinüberführen sollen. August Föppl[40c]) hat gezeigt, daß, wenn man nur Selbstspannungen mit kleinen (unendlich kleinen) Verschiebungen in Betracht zieht, dieselben den Lastspannungen bei ebenfalls unendlich kleinen Verschiebungen im allgemeinen einfach überlagert werden können, oder umgekehrt: das Spannungs- und Verschiebungsfeld aus einer äußeren Belastung bei kleinen Verschiebungen im allgemeinen unabhängig von den im System herrschenden Selbstspannungen ist. Letztere können also — auch falls das System theoretisch beherrscht werden kann — durch einen Belastungsversuch niemals ermittelt werden. L. Prandtl[40d]) hat aber gezeigt, daß es Ausnahmegebilde gibt, für die dieser Föpplsche Satz ungültig ist, und hat die Bedingungen, dem ein solches Gebilde gehorcht, von der Formänderungsarbeit ausgehend, gezeigt. Prandtl nennt solche Gebilde „elastisch unbestimmt", da ihr Spannungszustand infolge gegebener Lasten ohne Kenntnis der Herstellung des Körpers nicht berechnet werden kann. Das einfachste Beispiel solcher Gebilde sind die sogenannten „Ausnahme-Fachwerke", wie etwa das Stab-Dreieck mit verschwindender Höhe. Prandtl hat gezeigt, daß die dünne ebene Platte ebenfalls zu den elastisch unbestimmten Gebilden gehört. Er hat für die dünne ebene Rechteckplatte ein fachwerkähnliches Ersatzgebilde erdacht, welches die charakteristischen Ausnahme-Eigenschaften der Platte im wesentlichen erkennen läßt.

6. Selbstspannungen bei großen Verschiebungen. In allen bisherigen Untersuchungen haben wir stets kleine Verschiebungen vorausgesetzt und haben gesehen, daß unter dieser Einschränkung — von den Ausnahmegebilden (elastisch unbestimmten Systemen) abgesehen — das Überlagerungsgesetz stets gültig bleibt. Wenn man auf die Betrachtung kleiner Verschiebungen verzichtet, dann fällt das Überlagerungsgesetz ganz allgemein fort, so daß die Differentialgleichungen des Problems nicht mehr linear sind, und die Schwierigkeiten der Untersuchung sich außerordentlich vergrößern.

Eine allgemeine Theorie solcher Selbstspannungen ist bis jetzt noch nicht versucht worden. Es ist zu vermuten, daß allen bisher betrachteten Typen von Selbstspannungen bei kleinen Verschiebungen analoge Selbstspannungen mit großen Verschiebungen entsprechen. Beispielsweise kann man zu neuen Typen von Selbstspannungen kommen, wenn man bei den Volterraschen und Somiglianaschen Distorsionen einfach die Unstimmigkeiten groß annimmt. Aus einer dünnen ebenen Kreisringscheibe entsteht bei großen Unstimmigkeiten in tangentialer Richtung eine mit Selbstspannungen behaftete dünne kegelstumpfförmige Schale. Auch bei kontinuierlich verteilten Unstimmigkeiten können ähnliche mit Labilitätserscheinungen verbundene Selbstspannungen entstehen: Beispielsweise ist im Gießereiwesen längst die Erscheinung des Ausknickens von dünnen Stäben, die an massivere Bestandteile anschließen, durch die Gußspannungen bekannt[40e]). Es wäre sicherlich lohnend, eine allgemeine Theorie der Selbstspannungen mit großer Verschiebung zu versuchen.

Ein eng begrenzter Sonderfall einer dem Volterraschen Fall analogen Distorsion mit großer Verschiebung ist neuerdings von Sadowsky[41]) gelöst worden. Er betrachtet den Selbstspannungszustand des aus einem unendlich schmalen, ebenen, dünnen Plattenstreifen hergestellten Möbiusschen Bandes, und wendet auf dieses Problem die Theorie der eindimensionalen elastischen Kontinua[42]) an. Die Theorie führt auf 8 nicht lineare Differentialgleichungen mit 8 Unbekannten. Die Lösung geschieht durch Kombinierung der Theorie mit dem Versuch, indem gewisse charakteristische Unbekannten durch Beobachtung bzw. Versuch am Modell ermittelt werden. Das Hauptergebnis der Untersuchung von Sadowsky ist, daß

---

[40]) C. Honegger, Über Eigenspannungen. Festschrift. Prof. Dr. A. Stodola zum 70. Geburtstag.

[40a]) Honegger, Ausgleich der Beanspruchungen einer rasch rotierenden Radscheibe durch passenden Vorspannungszustand. B. B. C.-Mitteilungen, November 1919.

[40b]) Lottmann, Schrumpfspannungen bei Lichtbogenschweißung. V.D.I.-Zeitschrift 1930. S. 1340.

[40c]) Föppl, a. a. O. Vgl. auch A. und L. Föppl, Zwang und Drang, Bd. II. 2. Aufl.

[40d]) L. Prandtl, Elastisch bestimmte und elastisch unbestimmte Systeme. Beiträge zur technischen Mechanik und technischen Physik, S. 52, 1924.

[40e]) Siehe R. v. Steiger, a. a. O. S. 7.

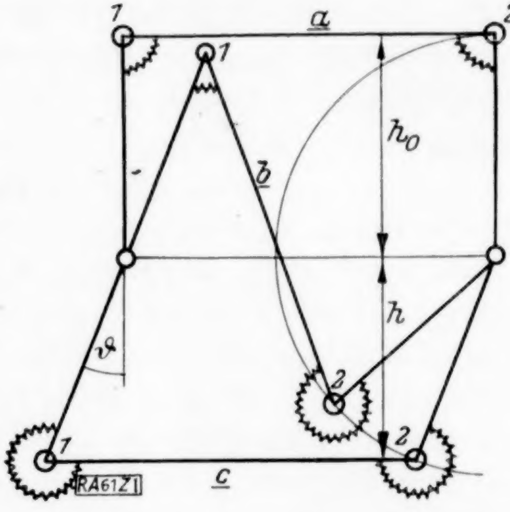
[41]) Sadowsky, Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 39. S. 49 uff. 1930.

[42]) Hamel, Handbuch der Physik, Bd. 5, Die Axiome der Mechanik, S. 18 uff.; Hamel, Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Ges. 25. 1925—26.

die Möbiussche Fläche nicht durch eine analytische Funktion dargestellt werden kann, sondern aus einer ebenen rechtwinkligen Dreieckfläche und einer anderen analytischen Fläche besteht, die sich an erstere stetig und mit stetiger erster Ableitung, jedoch mit einer Unstetigkeit in der Krümmung anschließt.

Während alle bisher betrachteten Selbstspannungszustände an gewisse nicht elastische Operationen (Herstellungsvorgang, nachträgliche Zwängungen, vorübergehende Überbeanspruchungen, Nachziehen von Spannschlössern usw.) gebunden sind, gibt es bei Zulassung endlicher, großer Verschiebungen auch noch eine ausgezeichnete Gruppe von Selbstspannungen, die durch rein elastische Operationen, also durch vorübergehend angreifende, den Körper nirgends plastizierende äußere Lasten erzeugt werden können. Verschiebungen und Spannungen sind überall stetige eindeutige Funktionen des Ortes; die Kompatibilitätsbedingungen sind überall befriedigt. Diese wesentliche Bemerkung stammt von Armanni[43]). Solche Selbstspannungen entstehen jedesmal, wenn eine dünne, biegsame, offene Schale mit ellipsoidischen Krümmungsverhältnissen, sei es nun eine kalottenartige oder ringartige Schale, so umgestülpt wird, daß die innere und äußere Mantelfläche ihre Rolle vertauschen. Das Umstülpen wird durch äußere Lasten bewirkt, die aber nachher entfernt werden können, ohne daß der Körper in die ursprüngliche Lage zurückkehren würde.

Almansi[44]) hat sich mit den Armannischen Selbstspannungen in einer Diskussion mit Somigliana beschäftigt. Er ist der Auffassung, daß Zusammenhangverhältnisse bei der Entstehung solcher Selbstspannungen überhaupt ohne Belang sind. Diese vermutungsweise aufgestellte Behauptung bedarf dringend der näheren Untersuchung. Für den ebenen Fall ist sofort einzusehen, daß die Behauptung nicht richtig ist. Denken wir uns beispielsweise einen sehr biegsamen Stab, der im natürlichen Zustand eine ebene gekrümmte Achse aufweist. Wird dieser Stab nur an einem Ende festgeklemmt, dann hat er offenbar nur eine einzige stabile Gleichgewichtslage: die spannungslose. Wird er dagegen in zwei Gelenken an beiden Enden gelagert, so daß er mit der Erdscheibe ein zweifach zusammenhängendes Gebilde darstellt, dann hat er außer der spannungslosen Gleichgewichtslage noch mindestens eine weitere Gleichgewichtsform, die mit Selbstspannungen behaftet ist, und zwar mit solchen von genau derselben Natur, wie die von Armanni untersuchten räumlichen Selbstspannungsfälle; dementsprechend müssen auch Selbstspannungen dieser Art als Armannische bezeichnet werden.



Wir können in das Wesen solcher Spannungszustände am besten durch eine weitere Vereinfachung des betrachteten Beispiels, welche die Lösung in einfachster und übersichtlichster Form gestattet, eindringen. Ersetzen wir also den Zweigelenkbogen durch einen rechteckigen Zweigelenkrahmen, und denken wir, daß beide Stiele und der Riegel starr sind, die Ecken aber solche Gelenke sind, die gegen Winkeländerung einen mit derselben proportionalen Widerstand entgegensetzen (Drehfedergelenke); die Elastizität unseres ganzen Rahmens ist also in die beiden Ecken konzentriert. Es sei die elastische Nachgiebigkeit (Winkeländerung pro Momenteinheit) des einen Federgelenkes ε_1 des anderen ε_2.

Wir können nun das Gebilde mit Hilfe vorübergehend angreifender äußerer Kräfte durch die Lage b hindurch in die Lage c bringen, in welcher der Außengurt des Rahmens nach innen gestülpt ist. Suchen wir das Kriterium dafür, daß diese Lage eine Gleichgewichtslage ist, und bejahendenfalls fragen wir, mit welcher Selbstspannung sie behaftet ist. Mit Benutzung des Hilfswinkels ϑ ist offenbar die Gleichgewichtsbedingung

$$M\varepsilon_1 = \pi + \vartheta$$

$$M\varepsilon_2 = \pi - \vartheta$$

daher

$$M = \frac{2\pi}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

$$\vartheta = \pi \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

Horizontalschub:

$$H = \frac{2\pi \cdot h_0}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \cdot \cos\left(\pi \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\right),$$

woraus alle übrigen inneren Kraftgrößen ohne weiteres folgen.

[43]) Armanni, Sulle deformazioni finite dei solidi elastici isotropi. Nuovo Cimento (6). 10 S. 427. 1915.

[44]) Almansi, La teoria delle distorsioni e le deformazioni finite dei solidi elastici. Lincei, 25_2, S. 191, 1916. Vgl. auch Almansi: L'ordinaria teoria dell'elasticica e la teoria delle deformazioni finite (5), 26_2, S. 3, 1917.

Auf Grund dieses und anderer einfacher Beispiele, ferner des von Armanni untersuchten Falles einer Kugelkalotte kann vermutungsweise ausgesagt werden, daß die notwendige Bedingung für das Entstehen Armannischer Selbstspannungen ist, daß der Körper ein statisch unbestimmtes, jedoch elastisch bestimmtes Gebilde darstellen soll.

Armanni hat noch einen eigenartigen Selbstspannungsfall untersucht, der mit den oben behandelten Umstülpungsfällen zwar verwandt ist, jedoch noch besondere Merkmale aufweist: Sie hat nämlich eine volle Kugelschale von gleichmäßiger, geringer Stärke betrachtet, dieselbe längs eines Meridians (Halbkreis) durchschnitten, das Innere nach außen gestülpt und die so entstandene offene Schale mit Hilfe einer kleinen Zwängung zur Passung gebracht und wieder in eine geschlossene Kugelschale verwandelt; auch für diesen Fall gelang ihr die Lösung in geschlossener Form.

Selbstspannungen mit großen Verschiebungen scheinen bisher technisch noch nicht nutzbar gemacht worden zu sein, jedoch dürften auch hier Möglichkeiten für technische Anwendungen vorliegen.

7. Wärmespannungen. Die durch aktuelle Temperaturunterschiede verursachten Wärme- oder Temperaturspannungen bilden eine besondere Gruppe der Selbstspannungen, deren Zusammenhang mit anders gearteten Selbstspannungszuständen vom mathematischen Standpunkte aus noch nicht allgemein aufgeklärt ist[45]). In gewissen einfachen Sonderfällen ist die Frage nach Wärmespannungen und die nach Herstellungsspannungen geradezu identisch: z. B. verursacht bei einem idealen Fachwerk die Längenunstimmigkeit Δl eines Stabes genau denselben Spannungszustand wie eine solche Erwärmung dieses Stabes, die bei ungehinderter Dehnung die Längenänderung Δl mit sich führen würde. Andererseits ist es aber nicht schwer, solche Selbstspannungszustände anzugeben, die durch keinerlei Temperaturfeld bedingt gedacht werden können, es sei denn, daß man im Temperaturfeld „Temperatursingularitäten" einfacher und höherer Ordnung — nach Art der Quellen, Doppelquellen usw. der Hydrodynamik, der Pole, Dipole usw. der Elektrotechnik sowie der „Lastensingularitäten"[46]) der Elastizitätstheorie — zulassen will; in diesem Falle verlieren aber die gleich mitzuteilenden thermoelastischen Grundgleichungen zunächst ihre Gültigkeit und müßten entsprechend verallgemeinert werden.

Die allgemeinste bekannte Fassung der thermo-elastokinetischen Randwertaufgabe, wie sie auf Grund der Vorarbeiten von Duhamel und Neumann von Voigt[47]) aufgestellt wurde, ist folgende:

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial e}{\partial x}+\mu\,\Delta u+q\frac{\partial \tau}{\partial x}+\varrho(X-\ddot{u})=0$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial e}{\partial y}+\mu\,\Delta v+q\frac{\partial \tau}{\partial y}+\varrho(Y-\ddot{v})=0$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial e}{\partial z}+\mu\,\Delta w+q\frac{\partial \tau}{\partial z}+\varrho(Z-\ddot{w})=0$$

$$l\,\Delta\tau-\gamma_1\frac{\partial \tau}{\partial t}+q\,t^0\frac{\partial e}{\partial t}=0,$$

wobei τ die Differenz der absoluten und der Normaltemperatur t^0 ist, ϱ ist die Dichte, γ_1 die spezifische Wärme der Volumeneinheit, l die Konstante der inneren Wärmeleitfähigkeit, λ und μ die Laméschen Konstanten. Als Randwerte sind an der Oberfläche die Verschiebungskomponenten vorgeschrieben und τ genügt da der Bedingung $l\frac{\partial \tau}{\partial \nu}=-\bar{l}[\tau-\tau_0]$, wobei $\bar{l}$ der Koeffizient der äußeren Wärmeleitfähigkeit und τ_0 die Differenz zwischen Oberflächentemperatur und t^0 bedeutet; ν ist die Flächennormale. Außerdem sind die Anfangswerte für t (Zeit) $=0$ von u, v, w, $\dot{u}$, $\dot{v}$, $\dot{w}$ und τ gegeben.

Wenn die Untersuchung dieses Randwertproblems auf das bloße Gleichgewichtsproblem beschränkt wird, also die Schwingungsglieder fortgelassen werden, so läßt sich das Problem im Prinzip auf die Lösung der elasto-statischen Randwertaufgabe und der Wärmeleitungsgleichung zurückführen. Dagegen bringen die Beschleunigungsglieder eine besondere Schwierigkeit in das Problem, die von Rosenblatt[48]) untersucht wurde. Es gelang ihm, die Lösung des allgemeinen Problems auf die Untersuchung der Eigenwerte und Eigenfunktionen einer Integralgleichung mit nicht symmetrischem Kern zurückzuführen.

[45]) Die oben angeführte Reißnersche Arbeit enthält auch in dieser Richtung wichtige Andeutungen.

[46]) Siehe diesen Bericht S. 70.

[47]) Voigt, Kompendium der theoretischen Physik. Leipzig 1895.

[48]) Rosenblatt, Über das allgemeine thermo-elastische Problem, Rendiconti di Palermo 29, welcher Arbeit auch die obige Fassung des Voigtschen Ansatzes entnommen wurde.

Die obige Fassung des Randwertproblems ist physikalisch insofern nicht einwandfrei, als sie der Temperaturabhängigkeit der Materialkonstanten nicht Rechnung trägt. Sie ist ferner insofern weitgehend eingeschränkt, als sie nur für solche Temperaturschwankungen τ gilt, die überall differentierbar und klein (unendlich klein) von derselben Größenordnung wie u, v, w sind. Diese Einschränkung hat zur Folge, daß die Temperaturschwankungen sich ebenso auswirken wie Massenkräfte, deren Potential $q\tau$ ist, zuzüglich Oberflächenkräften von der Größe $q\tau$. Das elasto-thermische Problem läßt sich somit im statischen Falle nach Bestimmung der Temperaturverteilung als ein elasto-statisches Problem mit Massenkräften behandeln[49]). Für das von obigem Ansatz erfaßte eingeschränkte elasto-thermische Problem hat somit die für den Fall von Massenkräften erweiterte Verträglichkeitsbedingung Gültigkeit.

Für zylindrische Körper beliebigen Querschnitts mit gegebener Temperaturverteilung, und zwar unter Voraussetzung konstanten Wärmeflusses (also die Temperatur τ eine harmonische Funktion von x und y) gelang es Muschelišvili[50]), die Bestimmung der Wärmespannungen einerseits auf eine logarithmische Potentialaufgabe, andererseits auf Volterrasche Distorsionen zurückzuführen. Seine Resultate gelten für beliebig zusammenhängende zylindrische Körper von unendlicher Länge. Sein Resultat ist kurz das folgende:

$$u = \frac{\beta P(x,y)}{2(\lambda+\mu)} + u_1(x,y) \qquad v = \frac{\beta Q(x,y)}{2(\lambda+\mu)} + v_1(x,y),$$

wobei β eine Materialkonstante ist, P und Q aber der reale bzw. imaginäre Teil des komplexen Integrals jener komplexen Funktion, deren Realteil die harmonische Funktion τ ist. u_1 v_1 aber stellen das Verschiebungsfeld aus einer Volterradistorsion dar, deren Charakteristiken aus der Bedingung bestimmt werden können, daß u und v eindeutige, stetige Funktionen sein müssen. Bei einfach zusammenhängendem Gebiet fallen die Zusatzglieder u_1 v_1 von selbst fort, da in diesem Falle P, Q eindeutige Funktionen sind. Die gewonnene Lösung läßt sich ohne weiteres auf zylindrische Körper von endlicher Länge erweitern, wobei dann nur noch offenbar ein Saint-Venantsches Stabproblem gelöst und der obigen Lösung zugefügt werden muß.

Aus dieser Lösung läßt sich ohne weiteres das Resultat für den Sonderfall einer hohlzylindrischen Röhre (Schornstein) ableiten, die schon von Föppl[51]) behandelt wurde. Für Vollzylinder hat Honegger[40]) gute Näherungslösungen mitgeteilt. Westergaard[52]) untersucht unter gewissen willkürlichen Annahmen über die Temperaturverteilung die Spannungsverteilung in einer elastisch gebetteten Platte, die die Halbebene überdeckt, ein Problem, welches für die Bemessung von Eisenbetonstraßendecken von Bedeutung ist.

Während diese Sonderlösungen von Anfang an eine ganz bestimmte, zeitlich unveränderliche und dazu noch mehr oder weniger willkürlich angenommene Temperaturverteilung im elastischen Körper voraussetzen, haben sich schwedische Forscher, insbesondere Berwald und Hellström[53]) die Aufgabe gestellt, für gewisse, technisch überaus wichtige Sonderfälle (insbesondere Platten und Tonnengewölbe) das elasto-thermische Problem den tatsächlichen Naturverhältnissen entsprechend physikalisch einwandfrei zu lösen. Ausgehend aus den tatsächlichen Temperaturvariationen in der Atmosphäre und in den Gewässern, wie sie aus den Arbeiten der Meteorologischen Landesanstalt für Schweden bekannt sind, ermitteln sie aus der Wärmeleitungsgleichung die in dem Körper tatsächlich zu erwartende Temperaturverteilung und gründen dann darauf die angenäherte, mit Hilfe der Arbeitsgleichungen durchgeführte Untersuchung der Wärmespannungen. Die Resultate sind in der Weise ausgearbeitet, daß sie für Bogenbrücken und ganz besonders für Eisenbeton-Talsperren leicht angewendet werden können. Der Vergleich mit den auf Grund der üblichen Annahme konstanten Temperaturgefälle ermittelten Temperaturspannungen zeigt nicht unerhebliche Unterschiede, so daß es sich lohnen würde, die wichtigsten Resultate der Berwald-Hellströmschen Arbeit bautechnischen Kreisen zugänglich zu machen.

Eine andere Arbeit, die die Temperaturspannungen ebenfalls den physikalisch tatsächlich zu erwartenden Temperaturverhältnissen entsprechend ermittelt, ist die Untersuchung von Grünberg[54]) über die Temperaturspannungen in einer Kugel, die plötzlich in ein heißes

[49]) Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, Artikel von Tedone. Allgemeine Theoreme der Mathematischen Elastizitätslehre. Bd. 4/4. S. 68.

[50]) Muschelišvili, Bulletin de l'Université de Tiflis 3. 1923.

[51]) Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik, Bd. V, S. 240 ff.

[52]) Westergaard, Om bereguing af plader paa elastisk underlag med saerlig henblik paa spörgsmaalet om spändinger i Betonveje. Ingenieuren 32. 513. 1923. Andere Temperaturspannungsfragen von Platten siehe z. B. Nádai, Elastische Platten, S. 264 ff., Berlin 1925.

[53]) F. R. Berwald und B. Hellström, Om temperaturvariationer och temperaturspänningar i betong konstruktioner. Stockholm 1921.

[54]) Grünberg, Über die in einer isotropen Kugel durch ungleichförmige Erwärmung erregten Spannungszustände, Zeitschr. f. Physik 35, S. 548, 1925.

Medium gebracht wird. Die Untersuchung stützt sich ebenfalls auf die Grundgleichungen für kleine Temperaturunterschiede und legt die weitere Annahme zugrunde, daß die Wärmeübergangszahl unendlich groß ist, so daß die Oberfläche gleich im ersten Augenblick die neue Außentemperatur annimmt. Unter dieser Voraussetzung sind die Spannungen unabhängig vom Durchmesser und von der Wärmeleitungszahl. Die tangentiale Spannung hat ihren Höchstwert im Anfangsaugenblick, und zwar auf der Oberfläche des Körpers, die größte Radialspannung hat entgegengesetztes Vorzeichen und kommt in der Mitte der Kugel in dem Augenblick vor, in dem der Temperaturverlauf an dieser Stelle seinen Wendepunkt hat. Die Untersuchung ist im Hinblick auf eine physikalische Fragestellung von großer Bedeutung durchgeführt worden. Joffé hat nämlich den großen Einfluß gezeigt, den die Oberflächenbeschaffenheit von Kristallen auf ihre Widerstandsfähigkeit ausübt. Um also Aufschlüsse über die Festigkeit unter Ausschaltung von Oberflächeneinflüssen zu erhalten, wollte Joffé die Temperaturspannungen heranziehen und hat daher auch die theoretische Untersuchung der Temperaturspannungen angeregt. Die Grünbergsche Lösung bezieht sich indessen nur auf den isotropen Fall, so daß sie keine verläßliche Unterlage für die Auswertung der Jofféschen Versuche mit Steinsalz bietet.

8. Zusammenhang der Selbstspannungen mit den höheren Spannungen aus Lastsingularitäten und aus Massenkräften. Ausgehend von Einzellasten haben Michell und Love[55]) unter dem Namen „Typische Verzerrungskerne" gewisse höhere Lastensingularitäten eingeführt.

Neményi[56]) hat die Lastsingularitäten-Frage von einem ganz allgemeinen Standpunkte aus behandelt und gezeigt, daß mit Hilfe des Einflußfeldbegriffes jeder inneren Kraftgröße (Spannungsgröße) eine bestimmte — als Grenzgebilde eines an einem engbegrenzten Teil des Körpers angreifenden Gleichgewichtssystems von äußeren Kräften definierte — Lastsingularität dual zugeordnet werden kann.

Wenn wir an einem einfach zusammenhängenden stabartigen Körper eine solche Lastsingularität anbringen, so ist es offenbar, daß, von der rein örtlichen Beanspruchung abgesehen, keinerlei innere Kräfte in dem Körper entstehen können. Ist dagegen der stabförmige Körper mehrfach zusammenhängend, so wird er in einen Spannungszustand versetzt, welcher — von der Angriffsstelle abgesehen — mit den Volterraschen Zwängungsspannungen identisch ist. Der für den um die Lastsingularitäten erweiterten Lastbegriff gezeigte neue Reziprozitätssatz[56]) schließt somit sowohl den Maxwellschen Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen, als auch den Volterraschen Satz von der Gegenseitigkeit der Zwängungen als Sonderfälle in sich.

Auch die auf derselben Grundlage für die Plattenbiegung und für die Scheiben definierten höheren Singularitäten weisen die obige Reziprozitätseigenschaft auf. Die Analogie mit den Volterraschen Distorsionen hört hier naturgemäß auf. Dagegen ist es aber leicht einzusehen, daß alle Spannungsfelder aus Somiglianaschen Distorsionen durch eine Belegung einer Linie (bzw. im allgemeinsten räumlichen Fall einer Fläche) mit solchartigen Lastensingularitäten erzeugt gedacht werden können.

Aus dem Gesagten geht somit hervor, daß, wenn man den Begriff der Last mit Hilfe der höheren Lastensingularitäten erweitert, alle Distorsionsspannungszustände als Lastspannungszustände erzeugt gedacht werden können.

Reißner[30]) hat indessen in seiner erwähnten Arbeit unabhängig vom Verfasser auf einen anderen Zusammenhang zwischen Eigenspannungen und Lastspannungen hingewiesen, der sich zunächst auf den Fall stetig verteilter Unstimmigkeiten (Eigenspannungsquellen) bezieht, aus welchem jedoch durch Grenzübergang auch unsere obigen Sätze folgen dürften. Dieser Reißnersche Satz besagt, daß wenn ein Selbstspannungsfeld σ, τ aus einem Eigenspannungsquellenfeld ${}^0\varepsilon$, ${}^0\gamma$ entspringt, dann kann σ, τ in der Form $\sigma = {}^0\sigma - {}^+\sigma$, $\tau = {}^0\tau - {}^+\tau$ angeschrieben werden, wobei das Spannungssystem mit dem Vorindex 0 das dem Quellenfeld vermöge des Hookeschen Gesetzes formal zugeordnete System ist, das mit dem Vorindex + bezeichnete Spannungsfeld aber sich als ein Lastspannungsfeld infolge der Massenkraftverteilung

$$X = -\frac{E\,m}{m+1}\left[\frac{1}{m-2}\frac{\partial\,{}^0\Theta}{\partial x} + \frac{\partial\,{}^0\varepsilon_x}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial\,{}^0\gamma_{xy}}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial\,{}^0\gamma_{xz}}{\partial z}\right]$$

(usw. mit zyklischer Vertauschung von x, y, z) bei unbelasteter Oberfläche errechnen läßt. 61

[55]) Love-Timpe, Lehrbuch der Elastizität, S. 220 und 247. Leipzig und Berlin 1907.

[56]) Neményi, Eine neue Singularitätenmethode für die Elastizitätstheorie. Zeitschrift f. angewandte Mathematik und Mechanik, 9. S. 488, 1929.

KLEINE MITTEILUNGEN

Schematischer Übergang von Vektorgleichungen auf komplexe Gleichungen bei ebenen Problemen. 1. Einleitung. Die räumliche Vektorrechnung gestattet, alle in Frage kommenden physikalischen Überlegungen sofort als Vektorgleichung anzusetzen. Die komplexe Zahl vertritt den Vektor für ebene Probleme, jedoch ist es üblich, sie fast ausschließlich dort anzuwenden, wo die Lösung durch analytische Funktionen möglich ist. Es soll hier gezeigt werden, daß es keine große Mühe macht, die komplexe Schreibweise in engere Verbindung mit der Vektorrechnung zu bringen. Durch den Übergang von Vektorgleichungen auf komplexe Gleichungen treten die Invarianzeigenschaften gewisser komplexer Ausdrücke stärker hervor. Dies stärkt das Verlangen nach einer deutlicheren Kennzeichnung der konjugiert komplex auftretenden Faktoren in den Gleichungen, die bisher vielfach durch Abmachungen im Text vermieden wurde. Andererseits könnte dadurch, wie in Abschnitt 4 gezeigt wird, ein engerer Zusammenhang der räumlichen und der ebenen Hydrodynamik erzielt werden.

Um die Überlegungen beim Übergang zu erleichtern, sollen drei Systeme einander gegenübergestellt werden: Die räumlichen Vektoren, die ebenen Vektoren und die komplexe Darstellung. Die drei Arten von Vektoren sollen hier durch kleine und große deutsche Buchstaben sowie kleine lateinische Buchstaben unterschieden werden, während die großen lateinischen Buchstaben Skalare bezeichnen.

2. Ebene Vektoren[1]). Um jede Unsicherheit bei der Behandlung ebener Probleme zu beseitigen, genügt es nicht, eine Komponente der räumlichen Vektoren nur in Gedanken zu unterdrücken. Es soll daher als erster Schritt der Übergang zu den ebenen Vektoren gezeigt werden, die die dritte Komponente prinzipiell nicht kennen. Bei diesen bleibt die Definition, die Addition, das innere (skalare) Produkt vollständig analog zu den räumlichen Vektoren. Erst das äußere Produkt erhält eine andere Darstellung. Das äußere Produkt zweier Vektoren bedeutet stets die Fläche des durch die beiden Vektoren festgelegten Parallelogramms. Im Raume hat das Parallelogramm außer seiner Größe noch zwei Orientierungen, also ebenso viele Komponenten wie ein räumlicher Vektor, so daß man dem Parallelogramm nach Verabredung des Vorzeichens eindeutig einen Vektor zuordnen kann (Vektorprodukt). In der Ebene hat eine Fläche keine verschiedenen Orientierungen, so daß das äußere Produkt in der Ebene genau so wie das innere Produkt ein Skalar ist. Andererseits läßt sich die senkrechte Zuordnung dort schon zu einem einzigen Vektor vornehmen. Benutzt man diese Möglichkeit, indem man durch den Ausdruck $[\mathfrak{A}]$ den um 90° in Richtung wachsender Winkel gedrehten Vektor $\mathfrak{A}$ bezeichnet, so kann man das äußere oder, wie man in der Ebene auch sagt, das zweite skalare Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ auch durch das erste skalare Produkt des gedrehten Vektors $[\mathfrak{A}]$ mit dem Vektor $\mathfrak{B}$ darstellen. Demnach geht das räumliche Vektorprodukt $[\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}] = -[\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{a}]$ über in das skalare Produkt $[\mathfrak{A}]\cdot\mathfrak{B} = -[\mathfrak{B}]\cdot\mathfrak{A}$, wobei also der zweite Vektor aus der Klammer heraustritt. Die Produkte von drei und mehr Vektoren sind hiernach ohne Schwierigkeiten abzuleiten (vgl. das Schema).

3. Komplexe Zahlen. Die komplexe Zahl läßt sich in der Gaußschen Zahlenebene als Vektor darstellen. Sie hat gegenüber gewöhnlichen Vektoren den Vorteil, daß mit ihr eine eindeutige Multiplikation und die Division möglich ist. Benutzt man nur analytische Funktionen in der Rechnung, so läßt sich ein Vektor $a = A_1 + i\cdot A_2$ niemals in seinen konjugiert komplexen Vektor $\bar{a} = A_1 - i\cdot A_2$ verwandeln, den man durch Spiegelung an der reellen Achse erhält. Bezeichnet $z = x + i\,y$ den Ortsvektor, so kann man eine Funktion $F(x, y)$ in der Form schreiben:

$$F(x, y) = F\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2\,i}\right) = F_1(z, \bar{z}).$$

Eine analytische Funktion von z allein würde daher nicht die in $F(x, y)$ vorhandene Freiheit besitzen. Eine sehr weitgehende Anwendung dieser Erkenntnis stellt der komplexe Nablaoperator dar, bei dessen Anwendung z und $\bar{z}$ als voneinander unabhängige Variable zu betrachten sind, so daß man partiell nach $\bar{z}$ differenzieren kann bei festgehaltenem z.

Die Übergangsbeziehungen von der ebenen Vektorrechnung zur komplexen Schreibweise lassen sich bei Vertrautheit mit der Algebra komplexer Zahlen leicht nachrechnen. Nur um den Grund für das Auftreten konjugiert komplexer Vektoren klarzulegen, sollen einige Bemerkungen über die Invarianz gegen Drehung des Koordinatensystems gemacht werden. Das Produkt zweier komplexer Zahlen hat als Richtung die Summe der Winkelabweichungen beider Vektoren von der reellen Achse. Es ist daher keineswegs unabhängig von der Richtung der reellen Achse. Benutzt man dagegen statt des einen Vektors den gespiegelten Vektor als Faktor, so hängt das Produkt nunmehr von der Winkeldifferenz beider Vektoren ab und besitzt demnach die notwendige Invarianz. Beim skalaren Produkt wird die Vertauschbarkeit der beiden Vektoren dadurch erreicht, daß dasselbe durch das arithmetische Mittel der beiden möglichen Ausdrücke dargestellt ist:

$$\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B} = \frac{1}{2}\,(\bar{a}\,b + a\,\bar{b}).$$

Daher ist auch

$$|\mathfrak{A}|^2 = \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{A} = a\cdot\bar{a}.$$

Die Funktionen oder Symbole $Re\,(a)$ und $Im\,(a)$ sind keine analytischen Funktionen, weil sie den Vektor a in seinen reellen Bestandteil

$$Re\,(a) = \frac{1}{2}\,(a + \bar{a})$$

und den vom Faktor i befreiten imaginären Bestandteil

$$Im\,(a) = \frac{1}{2\,i}\,(a - \bar{a})$$

zerlegen.

4. Anwendungen.

A. Komplexe Algebra.

1. Es sei rot $\mathfrak{w} = 0$.

Dreidimensional folgt daraus, es gibt ein Potential P, das durch

$d\,P = \mathfrak{w}\cdot d\,\mathfrak{z}$

bestimmt ist. $\mathfrak{z}$ ist der Ortsvektor.

Zweidimensional folgt aus rot $\mathfrak{W} = 0$ ebenfalls:

$d\,P = \mathfrak{W}\cdot d\,\mathfrak{Z}$.

[1]) C. Runge, Analytische Geometrie der Ebene. Leipzig 1908. Abschn. I. — R. Grammel, Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges. Braunschweig 1917. S. 6.

Komplex schreibt man diese Gleichung:

$$d P = \frac{1}{2}(\overline{w} \cdot d z + w \cdot d \bar{z}) = Re(\overline{w} \cdot d z).$$

2. Es sei div $\mathfrak{w} = 0$.

Zweidimensional gilt dann div $\mathfrak{W} =$ rot $[\mathfrak{W}] = 0$. Der Vektor $[\mathfrak{W}]$ hat demnach ein Potential S (die Stromfunktion von $\mathfrak{W}$), das durch die Gleichung bestimmt ist:

$$d S = [\mathfrak{W}] \cdot d \mathfrak{Z}.$$

Komplex geschrieben:

$$d S = \frac{1}{2}(\overline{i\, w} \cdot d z + i\, w \cdot d \bar{z}) = \frac{1}{2 i}(\overline{w} \cdot d z - w \cdot d \bar{z}) = Im(\overline{w} \cdot d z).$$

3. Aus div $\mathfrak{w} = 0$ und rot $\mathfrak{w} = 0$ folgt gemäß 1. und 2.:

$$d \omega \equiv d P + i\, dS = \overline{w} \cdot d z \quad \text{oder} \quad \overline{w} = \frac{d \omega}{d z}.$$

4. Der Impulssatz für stationäre Potentialströmung liefert unter Benutzung der Bernoullischen Gleichung, $P_0 = P + \frac{1}{2} \varrho \mathfrak{w}^2$, für die Summe der äußeren Kräfte $\mathfrak{k}$ eines Volumenelementes das Oberflächenintegral:

$$\mathfrak{k} = -\oint P \cdot d \mathfrak{f} - \varrho \oint \mathfrak{w} \cdot (\mathfrak{w} \cdot d \mathfrak{f}) = \frac{1}{2} \varrho \oint \mathfrak{w}^2 \cdot d \mathfrak{f} - \varrho \oint \mathfrak{w} \cdot (\mathfrak{w} \cdot d \mathfrak{f}).$$

Im Zweidimensionalen entspricht der nach außen gerichteten Normalen $d \mathfrak{f}$ der Oberfläche ein Vektor $-[d \mathfrak{Z}]$ bei Integration auf der Randkurve im Umlaufsinn wachsender Winkel. Daher erhält man hier:

$$\mathfrak{K} = -\frac{1}{2} \varrho \oint \mathfrak{W}^2 \cdot [d \mathfrak{Z}] + \varrho \oint \mathfrak{W} \cdot (\mathfrak{W} \cdot [d \mathfrak{Z}]).$$

Umwandlungsschema:

Dimensionszahl:	Dreidimensional	Zweidimensional	
Vektorart:	räumliche Vektoren	ebene Vektoren	komplexe Zahlen
Koordinaten:	x, y, z	x, y	$z = x + i y$ $\bar{z} = x - i y$
1. Definitionen.			
Vektor:	$\mathfrak{a}$	$\mathfrak{A}$	a
konjugiert komplexer Vektor:	—	—	$\bar{a}$
senkrecht zugeordneter Vektor:	—	$[\mathfrak{A}]$	$i \cdot a$
2. Vektoralgebra.			
Summe:	$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$	$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$	$a + b$
inneres Produkt:	$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \equiv (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})$	$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} \equiv (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B})$	$\frac{1}{2}(\bar{a}\, b + a\, \bar{b}) = Re(\bar{a} \cdot b)$
äußeres Produkt:	$[\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}] = -[\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}]$	$[\mathfrak{A}] \cdot \mathfrak{B} = -\mathfrak{A}[\mathfrak{B}]$	$\frac{1}{2 i}(\bar{a}\, b - a\, \bar{b}) = Im(\bar{a}\, b)$
Produkte von drei Vektoren:	$(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c}$	$(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}) \cdot \mathfrak{C}$	$\frac{1}{2}(\bar{a}\, b c + a\, \bar{b} c) = c \cdot Re(\bar{a}\, b)$
	$[\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}] \cdot \mathfrak{c}$	0	0
	$[[\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}] \cdot \mathfrak{c}] = \mathfrak{b}(\mathfrak{a}\mathfrak{c}) - \mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c})$	$([\mathfrak{A}] \cdot \mathfrak{B}) \cdot [\mathfrak{C}] = \mathfrak{B}(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C}) - \mathfrak{A}(\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C})$	$\frac{1}{2}(\bar{a}\, b c - a\, \bar{b} c) = i c \cdot Im(\bar{a}\, b)$
3. Vektoranalysis.			
Nablaoperator:	∇	∇	$\nabla = 2 \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \ldots\right)_z$
Komponenten:	$\frac{\partial}{\partial x}$	$\frac{\partial}{\partial x}$	$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial}{\partial z}$
	$\frac{\partial}{\partial y}$	$\frac{\partial}{\partial y}$	$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial}{\partial z}\right)$
	$\frac{\partial}{\partial z}$		
Gradient:	grad $P(x,y,z) = \nabla \cdot P(x,y,z)$	grad $P(x,y) = \nabla \cdot P(x,y)$	grad $P(z,\bar{z}) = 2 \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} P(z,\bar{z})\right)_z$
Divergenz:	div $\mathfrak{a} = (\nabla \cdot \mathfrak{a})$	div $\mathfrak{A} = (\nabla \cdot \mathfrak{A})$	div $a = 2 \cdot Re\left(\frac{\partial a}{\partial z}\right)$
Rotor:	rot $\mathfrak{a} = [\nabla \cdot \mathfrak{a}]$	rot $\mathfrak{A} = [\nabla] \cdot \mathfrak{A} = -\nabla \cdot [\mathfrak{A}] = -$ div $[\mathfrak{A}]$	rot $a = 2\, Im\left(\frac{\partial a}{\partial z}\right)$
div $a + i \cdot$ rot a:	—	—	$2 \cdot \frac{\partial a}{\partial z}$

Komplex ergibt sich:

$$k = -\frac{1}{2}\varrho \oint w \cdot \overline{w} \cdot i\, d z$$
$$+\frac{1}{2}\varrho \oint w \cdot (\overline{w} \cdot i\, d z + w \cdot \overline{i\, d z})$$
$$= -\frac{1}{2} i \varrho \oint w^2 \cdot d \bar{z}$$

oder

$$\bar{k} = \frac{1}{2} i \varrho \oint \overline{w}^2 \cdot d z \quad \text{(1. Blasiussche Formel).}$$

5. Das aus dem Impulssatz (4) sich ergebende Moment heißt:

$$d\mathfrak{m} = [\mathfrak{z} \cdot d\,\mathfrak{k}].$$

Zweidimensional:

$$d M = [\mathfrak{Z}] \cdot d \mathfrak{K}.$$

Komplex:

$$d M = Re\,(\overline{i z} \cdot d k) = Re\,(i z \cdot d \bar{k})$$

oder

$$M = Re\left(-\frac{1}{2}\varrho \oint \overline{w}^2 \cdot z \cdot d z\right) \quad \text{(2. Blasiussche}$$

Formel).

B. Komplexe Analysis.

6. Es sei $P(z, \bar{z})$ eine reelle Funktion, so daß $P(z, \bar{z}) = \overline{P(z, \bar{z})}$. Dann erhält man die bekannte Vektorbeziehung: rot grad $P(z, \bar{z}) = 0$ aus folgenden Gleichungen:

$$\text{grad } P(z, \bar{z}) = 2 \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} P(z, \bar{z})\right)_z,$$

$$\text{rot grad } P(z, \bar{z}) = 4\, Im \left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \cdot \partial z} P(z, \bar{z})\right)$$
$$= \frac{2}{i}\left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \cdot \partial z} P(z, \bar{z}) - \frac{\partial^2}{\partial z \cdot \partial \bar{z}} \overline{P(z, \bar{z})}\right) = 0.$$

7. Gegeben sei β als komplexe Funktion des Ortes $\beta(z, \bar{z})$. Gesucht sei w, definiert durch div w + $i \cdot$rot $w = \beta$. Man erhält:

$$2 \cdot \frac{\partial w}{\partial z} = \beta, \text{ also: } w = \frac{1}{2} \cdot \int \beta \cdot d z + f(\bar{z}).$$

8. β in 7. sei konstant gleich γ. Dann ergibt sich w:

$$w = \frac{1}{2}\gamma \cdot z + f(\bar{z}) \text{ oder } \overline{w} = \frac{1}{2}\bar{\gamma} \cdot \bar{z} + f_1(z).$$

9. β in 7. sei $\gamma \cdot e^{-\frac{z \cdot \bar{z}}{a \cdot \bar{a}}}$. Daraus w:

$$w = \frac{\gamma \cdot a \cdot \bar{a}}{2 \cdot \bar{z}}\left(1 - e^{-\frac{z \cdot \bar{z}}{a \cdot \bar{a}}}\right) + f(\bar{z})$$

oder

$$\overline{w} = \frac{\bar{\gamma} \cdot a \cdot \bar{a}}{2 \cdot z}\left(1 - e^{-\frac{z \cdot \bar{z}}{a \cdot \bar{a}}}\right) + f_1(z).$$

Läßt man a gegen Null gehen unter Konstanthaltung von $\gamma \cdot a \cdot \bar{a} \cdot \pi = Q + i\Gamma$, so erhält man eine Singularität im Nullpunkt und außerhalb desselben eine analytische Funktion von z allein:

$$\overline{w} = \frac{Q - i\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{z} + f_1(z).$$

Göttingen, den 20. November 1930.

A. Busemann. 135

Allgemeine Kontrollformel für das Differenzenschema. In Heft 5, Band 10 dieser Zeitschrift teilte ich für die Mittelwerte einer Folge von Funktionswerten eine Kontrollformel mit, die ein Spezialfall einer allgemeinen Beziehung ist, die sich in einem Differenzenschema von $n + 1$-Funktionswerten auf $n - m$-Differenzenspalten $(m \leq n)$ anwenden läßt. Sie hat die Form:

$$\sum_{0}^{n-1}{}_{\nu} \frac{f(a+\nu) + f(a+\nu+1)}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{0}^{n-m-1}{}_{\nu} (-1)^{\nu} \cdot {}^{\nu+1}c_{n-\frac{\nu-1}{2}} \cdot f^{\nu}\left(a + n - \frac{\nu}{2}\right) - f(a+n)\right.$$
$$\left. + (-1)^{n-m} \sum_{0}^{m}{}_{\nu}\, {}^{n-m}c_{\frac{n-m}{2}+\nu} \cdot f^{n-m}\left(a + \frac{n-m}{2} + \nu\right)\right].$$

Hierin kennzeichnet die Symbolik der c die Zahlenwerte in dem Summationsschema der Zahlenfolge 1, 2, 2, 2, . . ., das mit dem Differenzenschema der Funktionswerte, wie folgt, zusammengestellt sei. (Siehe umstehende Tabelle.) Der Ausdruck der zweiten Summe auf der rechten Seite der Gleichung zeigt, daß eine Zuordnung zwischen dem Differenzen- und Summationsschema besteht, derart, daß die Werte einer Spalte des ersteren reihenweise mit den Zahlen der an entsprechender Stelle in letzterem stehenden Spalte multipliziert werden.

Für $m = n - 1$, d. h. wenn nur die erste Differenzenspalte berücksichtigt wird, ergibt sich die a. a. O. mitgeteilte Kontrollformel:

$$\sum_{0}^{n-1}{}_{\nu} \frac{f(a+\nu) + f(a+\nu+1)}{2} = n\, f(a+n)$$
$$- \frac{1}{2}\sum_{0}^{n-1}{}_{\nu}\, {}^{1}c_{\nu+\frac{1}{2}} \cdot f^{1}\left(a + \nu + \frac{1}{2}\right).$$

Besonderes Interesse verdienen die Formeln für die Grenzen $m = 0$ und $m = n$.

$m = 0$ liefert

$$\sum_{0}^{n-1}{}_{\nu} \frac{f(a+\nu) + f(a+\nu+1)}{2} = n\, f(a+n)$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\sum_{1}^{n-1}{}_{\nu} (-1)^{\nu} \cdot {}^{\nu+1}c_{n-\frac{\nu-1}{2}} \cdot f^{\nu}\left(a + n - \frac{\nu}{2}\right)\right.$$
$$\left. + (-1)^{n} \cdot {}^{n}c_{\frac{n}{2}} \cdot f^{n}\left(a + \frac{n}{2}\right)\right].$$

Diese Gleichung setzt also die Bildung sämtlicher n-Differenzenspalten für die $n + 1$-Funktionswerte voraus.

$m = n$ ergibt unter der Berücksichtigung, daß dann

$$\sum_{0}^{n-m-1}{}_{\nu} (-1)^{\nu} \cdot {}^{\nu+1}c_{n-\frac{n-1}{2}} \cdot f^{\nu}\left(a + n - \frac{\nu}{2}\right)$$
$$= \sum_{0}^{n}{}_{\nu} [\ldots] - \sum_{n-m}^{n}{}_{\nu} [\ldots] = 0$$

ist,

$$\sum_{0}^{n-1} \frac{f(a+\nu)+f(a+\nu+1)}{2} = \frac{1}{2}\{1\,f(a)$$
$$+2\,[f(a+1)+f(a+2)+\ldots.+f(a+n-1)]$$
$$+1\,f(a+n)\}.$$

Ist in dieser Formel, die sich nur auf die Spalte der Funktionswerte beschränkt, $n=1$, so erhält man den Ausdruck für den Mittelwert zweier benachbarter Funktionswerte

$$\frac{f(a)+f(a+1)}{2}.$$

Zur praktischen Verwendbarkeit der allgemeinen Kontrollgleichung, die auch für Funktionsreihen mit nichtäquidistanten Argumentwerten gilt, ist noch zu bemerken, daß sie, sofern sie sich auf die jeweils vorhandenen $n-m$-Differenzenspalten erstreckt, das Differenzenschema vollständig kontrolliert einschließlich der zwischen je zwei Funktionswerten gebildeten Mittelwerte.

Es ist aber auch möglich, das Differenzenschema **ohne Mittelwerte** mit einer einzigen Gleichung vollständig zu kontrollieren, indem man die rechte Seite der für die vorliegenden n-m-Differenzenspalten abgeleiteten Formel gleich der rechten Seite der für $m=n$ abgeleiteten Formel setzt.

Will man vermeiden, daß die letzte Differenzenspalte mit wachsenden absoluten Zahlenbeträgen der entsprechenden Summationsspalte mit ebenfalls zunehmenden Werten zugeordnet ist, so gebraucht man die Formel in umgekehrter Richtung, wobei jedoch die Vorzeichen der Differenzenspalten von ungerader Ordnung umzukehren sind.

^{n+1}c	...	^{V}c	^{IV}c	^{III}c	^{II}c	^{I}c	c	f	f^{I}	f^{II}	f^{III}	f^{IV}	....	f^{n}
							1	$f(a)$						
						1			$f^{I}\left(a+\frac{1}{2}\right)$					
					1		2	$f(a+1)$		$f^{II}(a+1)$				
				1		3			$f^{I}\left(a+\frac{3}{2}\right)$		$f^{III}\left(a+\frac{3}{2}\right)$			
			1		4		2	$f(a+2)$		$f^{II}(a+2)$		$f^{IV}(a+2)$		
		1		5		5			$f^{I}\left(a+\frac{5}{2}\right)$		$f^{III}\left(a+\frac{5}{2}\right)$		....	
	...		6		9		2	$f(a+3)$		$f^{II}(a+3)$		....	....	
	...	...		14		7			$f^{I}\left(a+\frac{7}{2}\right)$		....		....	$f^{n}\left(a+\frac{2n-n}{2}\right)$
1	...		...		16		2	$f(a+4)$		....		....	....	
	...	...		...		9			....		....		....	
	...		...		...		...	....		....		$f^{IV}\left(a+\frac{2n-4}{2}\right)$		
		...		...		...			....		$f^{III}\left(a+\frac{2n-3}{2}\right)$			
			...		...		...	....		$f^{II}\left(a+\frac{2n-2}{2}\right)$				
				...		...			$f^{I}\left(a+\frac{2n-1}{2}\right)$					
					...		2	$f(a+n)$						

Jena, Institut für angewandte Mathematik. Helmut Werner. 120

Über einen Fall der Bewegung eines schweren Punktes auf einer rauhen schiefen Schraubenfläche[1]**.** Es sei die z-Achse vertikal aufwärts gerichtet; mit r, φ, z bezeichnen wir die Zylinderkoordinaten des Punktes P vom Gewicht g, der sich auf der rauhen schiefen Schraubenfläche

$$z=a\,r+b\,\varphi,\quad a=\operatorname{tg}\alpha,\quad b=\frac{h}{2\pi},\quad \frac{b}{r}=\operatorname{tg}\beta \qquad (1)$$

bewegt, wo α und β die Winkel mit der horizontalen Ebene bzw. der geradlinigen Erzeugenden der Fläche und der Tangente zur Schraubenlinie auf der Fläche mit der Entfernung r von der z-Achse bedeuten.

Dann haben wir für diese Bewegung die folgenden Lagrangeschen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2 r}{d t^2}-r\left(\frac{d\varphi}{d t}\right)^2 &= -\frac{N a}{\Delta}-k N\frac{\frac{d r}{d t}}{v}\\
\frac{d^2\varphi}{d t^2}+\frac{2}{r}\frac{d\varphi}{d t}\frac{d r}{d t} &= -\frac{N b}{\Delta r^2}-k N\frac{\frac{d\varphi}{d t}}{v}\\
\frac{d^2 z}{d t^2} &= -g+\frac{N}{\Delta}-k N\frac{\frac{d z}{d t}}{v}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (2),$$

wo N die normale Reaktion, k der Reibungskoeffizient, $\Delta=\sqrt{a^2+\frac{b^2}{r^2}+1}$,

$$v=\sqrt{\left(\frac{d r}{d t}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{d t}\right)^2+\left(\frac{d z}{d t}\right)^2}\ \text{ist.}$$

[1]) Zusammenfassung eines Vortrages, gehalten auf dem Kongreß der russischen Mathematiker in Kharkov (25. Juni 1930).

Indem wir N aus den Gleichungen (2) auf Grund von (1) eliminieren, finden wir folgende Gleichungen für die Bewegung der Projektion des Punktes P auf die horizontale Ebene

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2 r}{d t^2} - r\left(\frac{d\varphi}{d t}\right)^2 + \left[a r\left(\frac{d\varphi}{d t}\right)^2 - \frac{2b}{r}\frac{d\varphi}{d t}\frac{d r}{d t} + g\right]\\
&\qquad\qquad\left(\frac{a}{\Delta} + k\frac{\frac{d r}{d t}}{v}\right)\frac{1}{\Delta} = 0\\
&\frac{d^2\varphi}{d t^2} + \frac{2}{r}\frac{d\varphi}{d t}\frac{d r}{d t} + \left[a r\left(\frac{d\varphi}{d t}\right)^2 - \frac{2b}{r}\frac{d\varphi}{d t}\frac{d r}{d t} + g\right]\\
&\qquad\qquad\left(\frac{b}{\Delta r^2} + k\frac{\frac{d\varphi}{d t}}{v}\right)\frac{1}{\Delta} = 0
\end{aligned}\right\} \quad (3).$$

Der spezielle, für die Anwendungen wichtige Fall[2]) ist der, wo $r = r_0 =$ konst. ist. Man sieht sofort aus den Gleichungen (3), daß diese Bewegung nur unter der Bedingung

$$k = \frac{\operatorname{tg}\beta_0}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta_0 + 1}\cos\beta_0}, \quad \operatorname{tg}\beta_0 = \frac{b}{r_0} \quad . \quad (4)$$

möglich ist und mit der konstanten Geschwindigkeit

$$v_0 = -\sqrt{b^2 + r_0^2}\frac{d\varphi}{d t} = \sqrt{r_0 g a}\,, \quad \frac{d\varphi}{d t} = \omega_0 = \text{konst.} \quad (5)$$

stattfindet.

Wenn man in (3) $r = r_0 + \xi$, $\varphi = \omega_0 t + \eta$ setzt[3]), so findet man, indem man (4) und (5) in Betracht zieht, für das System (S) der Differentialgleichungen in ξ, η folgende Gleichungen der ersten Annäherung (équations aux variations)

$$\begin{aligned}
&v_0 \Delta_0^2 \frac{d^2\xi}{d t^2} + \frac{(3a^2 + 1) r_0^2 + b^2}{\sqrt{r_0^2 + b^2}}\frac{g b}{r_0^2}\frac{d\xi}{d t}\\
&\quad -\left(1 - \frac{b^2}{r_0^2}\right)\frac{v_0^3}{r_0^2 + b^2}\xi + 2 g a\sqrt{r_0^2 + b^2}\frac{d\eta}{d t} = 0,\\
&\quad -\frac{2 r_0^2 + 3 b^2}{(r_0^2 + b^2)^{3/2}} r_0^2 \Delta_0^2 a g \frac{d\xi}{d t}\\
&\quad -\frac{r_0^4 (1 + a^2) + [2 r_0^2 (1 + a^2) + b^2] b^2}{(r_0^2 + b^2)^2}\frac{v_0 g b}{r_0}\xi\\
&\quad + r_0^2 \Delta_0^2 v_0 \frac{d^2\eta}{d t^2} = 0\,.
\end{aligned}$$

Die entsprechende charakteristische Gleichung hat folglich eine einfache Wurzel Null, und ihre drei anderen Wurzeln sind negative oder mit ihren negativen Realteilen Größen.

Da nun das System (S) η explizite nicht enthält, kommen in den allgemeinen Ausdrücken für $\xi, \frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}$ die Glieder mit dem charakteristischen Exponent Null nicht vor. Die betrachtete Bewegung ist stabil[4]).

Leningrad. Michael Akimoff. 108

[2]) Siehe die hierauf bezügliche interessante Arbeit von Prof. L. B. Levenson, „Machines for ore dressing. Spiral separator, its theory and design". Leningrad 1925.

[3]) Siehe zum Beispiel P. Appell, „Traité de mécanique rationelle", t. II, 1904, p. 343—346. Für die Untersuchung der in Betracht kommenden Bewegung wurde dieses Verfahren zuerst von N. P. Neronoff angewandt. Siehe die nächste Anmerkung.

[4]) Nach einer mündlichen Mitteilung von Prof. N. P. Neronoff hat er der Leningrader mechanischen Gesellschaft eine spezielle Arbeit vorgelegt, welche die ausführliche Untersuchung der gestörten Bewegung in der Nachbarschaft der betrachteten stabilen Bewegung vermittels der Methode von Poincaré-Liapounoff enthält.

Eine Anwendung der Elastizitätstheorie in der Medizin. Vor kurzem ist eine umfangreiche Arbeit des Wiener Otologen Otto Mayer „Über die Entstehung der Spontanfrakturen der Labyrinthkapsel und ihre Bedeutung für die Otosklerose" (Z. f. Hals-, Nasen- und Ohrenheilkunde 1930, 3. Heft) erschienen, bei der Verfasser Gelegenheit hatte, in den Fragen elastostatischer Natur mitzuarbeiten. Diese Untersuchungen, deren technischer Teil im folgenden kurz geschildert werden soll, stellen ein Beispiel nutzbringender Zusammenarbeit von Arzt und Ingenieur vor, die ihr klassisches Vorbild in der Deutung der Spongiosa-Struktur des menschlichen Oberschenkelknochens durch C. Culmann besitzt.

Die Arbeit Mayers behandelt die Frakturen der Labyrinthkapsel des menschlichen Gehörorgans im allgemeinen und insbesonders jene, die ohne merkbare äußere Gewalteinwirkung, ohne vorangegangenes Trauma, entstanden sind und daher „Spontanfrakturen" genannt werden. Die Lokalisation der entstehenden Bruchspalten ist eine derart gesetzmäßige, typische, daß bei der Entstehung dieser Frakturen die elastostatischen Verhältnisse der Labyrinthkapsel und des sie einschließenden Felsenbeins von wesentlichem Einfluß zu sein scheinen. Für das elastostatische Verhalten der Labyrinthkapsel ist es von Bedeutung, daß sie in ihrem mittleren Teile aus einem schalenartigen Hohlkörper besteht, dessen kompaktes Knochenmaterial im Laufe des Lebens sonderbarerweise keinen physiologischen Umbauprozeß, keine Erneuerung erfährt. Dieser innere Teil der Kapsel ist von einem spongiösen, von jüngeren, elastischen Elementen durchsetzten Medium umgeben, das ein relativ großes Maß von Verformungsfähigkeit bewahrt, so daß der schalenartige Hohlkörper in ein nachgiebiges Medium gebettet erscheint. Dieser Hohlkörper weist in seiner Wandung zwei kleine lochförmige Ausnehmungen, die „Fenster" auf und trägt drei relativ stark gekrümmte, röhrenartige Bogen, die drei „Bogengänge". Das Material des Gebildes besitzt eine im Verhältnis zur Druckfestigkeit sehr tiefgelegene Zugfestigkeit und wird durch das erwähnte „Altern" des Knochens schon in den mittleren Lebensjahren statisch und dynamisch äußerst spröde, reagiert demnach auch auf lokal beschränkte Häufungen von Zugspannungen unmittelbar mit einer Gefügetrennung. Es ist daher zu erwarten, daß in der Labyrinthkapsel an allen jenen Stellen, an denen elastizitätstheoretisch mit örtlichen Extrema der Zugspannungen zu rechnen ist, schon bei ganz geringfügigen statischen oder dynamischen Einwirkungen ein Riß entstehen wird. Solche Orte lokaler Zugspannungshäufung sind nun bekanntlich die Ränder der beiden Fenster der Labyrinthkapsel bei einseitigem oder allseitigem Zug oder auch einseitiger Druckbelastung und weiters die Innenleibungen der relativ stark gekrümmten Bogengänge unter Einwirkungen, die eine Krümmungsverminderung anstreben. Tatsächlich finden sich die Spontanfrakturen an den Fenstern und den Bogengängen dort, wo die lokalen Zugspannungshäufungen zu erwarten sind, so daß die Lokalisation der Frakturen elastostatisch geklärt erscheint.

Anschließend mußte die Frage behandelt werden, wie es überhaupt zu statischen oder dynamischen Einwirkungen auf die Labyrinthkapsel kommen kann, da dieses Gebilde im Innern eines Knochens, der „Pyramide" der Pars petrosa gelegen ist. Nun zeigt eine anatomische Untersuchung, daß diese Pyramide wohl an dem einen Ende, der Basis, fest mit dem Hinterhauptbein des Schädels verbunden ist, daß jedoch das andere Ende, die Spitze, durch Spalten und Knorpelfugen vom Schädel getrennt ist, so daß diese

Pyramidenspitze eine gewisse Verschieblichkeit besitzt, die sich auch dem Operateur durch ein „Federn" beim Stemmen bemerkbar macht. Statisch ist daher die Pyramide als einseitig eingespannter Konsolträger aufzufassen, der an seiner Einspannungsstelle, also dort, wo das Biegemoment seinen Größtwert erreicht, die Labyrinthkapsel einschließt. Es muß daher bei der geringsten Verschiebung der Pyramidenspitze zu starken achsialen Einwirkungen auf die Labyrinthkapsel kommen, die in der dargelegten Weise zur Rissebildung an den Orten lokaler Zugspannungsextrema führt. Tatsächlich zeigt sich, daß alle Labyrinthbrüche senkrecht zur Pyramidenachse verlaufen, so daß der geschilderte Zusammenhang bestätigt erscheint.

Als äußere Einwirkungen, die eine geringfügige Verschiebung der Pyramidenspitze zur Folge haben können, kommen hinsichtlich der traumatischen Labyrinthbrüche Einwirkungen durch Schußverletzungen (hydrodynamischer Druck im Schädelinneren), Hieb oder Fall in Frage. Die Spontanfrakturen könnten statisch durch Trägheitskräfte im Gehirn bei plötzlichen Bewegungsänderungen oder durch stetige Lagenänderungen der Pyramidenspitze oder auch durch die sogen. „physiologischen Traumen" hervorgerufen werden; vom statischen Standpunkt erscheint es überdies auch möglich, daß durch die ständige Einwirkung des Unterkiefer-Gelenkdruckes bei Anomalien in der Gelenkkopf-Ausbildung dynamische Einwirkungen auf die benachbarte Pyramide übertragen werden.

Brünn. E. Chwalla. 136

BUCHBESPRECHUNGEN

AUGUST **HERTWIG,** Johann Wilhelm Schwedler. Sein Leben und sein Werk. Bearbeitet und herausgegeben im Auftrage der Akademie des Bauwesens. Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin 1930. 140 S. Preis 17 M.

Johann Wilhelm Schwedler war einer jener großen Ingenieure, die zu den Schöpfern des deutschen Eisenbaues zu zählen sind. Er wurde im Jahre 1823 in Berlin geboren, in der Zeit des Vormärz, mehr als ein Jahrzehnt bevor es eine deutsche Eisenbahn gab, und in seine Lebenszeit (bis 1894) fällt der gewaltige Aufstieg des Deutschen Reiches, die grandiose Entwicklung der Naturwissenschaften und der Technik. In den Problemen seiner Abhandlungen, die der Praxis ihre Entstehung verdanken, spiegelt sich auch der technische Fortschritt des Bauingenieurwesens in dieser Periode der Eisenbahnen wieder. Im Jahre 1851 schrieb Schwedler eine wichtige Arbeit über Balkenbrückensysteme, es folgten Untersuchungen über Nietverbindungen, über die Konstruktion eiserner Brücken, über Kuppelsysteme, über Drehbrücken und über den Eisenbahnoberbau. Diese Abhandlungen, von denen hier nur die wesentlichsten hervorgehoben sind, haben zum großen Teil die Baustatik und den Eisenbrückenbau nachhaltig beeinflußt. An Anerkennung und verdienten Ehrungen fehlte es Schwedler nicht. Von 1868 an war er als Vortragender Rat im Ministerium für Handel, Gewerbe und öffentliche Arbeiten tätig, und bei allen großen Brücken und bedeutenden Eisenbauten Norddeutschlands wurde sein Rat in Anspruch genommen. In einer überaus interessanten Schrift bringt uns A. Hertwig das Leben und das Werk dieses hervorragenden Bauingenieurs nahe, und es ist reizvoll, die von Hertwig neu veröffentlichten Abhandlungen Schwedlers jetzt zu lesen.

Ratzersdorfer.

Dr.-Ing. WALTER **KAUFMANN,** o. Professor an der Technischen Hochschule zu Hannover. Statik der Tragwerke. Zweite, verbesserte und ergänzte Auflage. Mit 368 Textabbildungen. Handbibliothek für Bauingenieure. IV. Teil: Brücken- und Ingenieurhochbau. 1. Bd. Verlag Springer, Berlin 1930. VIII + 322 S.

Die erste Auflage der „Statik", die in dieser Zeitschrift ausführlich besprochen wurde[1], ist ergänzt worden, aber die knappe, elegante Darstellung ist beibehalten, und so wird auch das Buch in seiner zweiten Auflage bei den Studierenden und Ingenieuren der Praxis gleich beliebt sein.

Ratzersdorfer.

[1]) Bd. 4 (1924), S. 191/192.

Dr.-Ing. RUDOLF **KIRCHHOFF,** Regierungsbaumeister. Die Statik der Bauwerke. Zweiter Band: Formänderungen statisch bestimmter ebener Fachwerk- und Vollwandträger — Allgemeine Theorie der statisch unbestimmten Fachwerk- und Vollwandträger. Zweite neubearbeitete und erweiterte Auflage. Mit 261 zum Teil farbigen Textabbildungen. Verlag Wilhelm Ernst & Sohn. IX + 368 S. Preis geh. 25 M, geb. 27 M.

Der vorliegende Band enthält im ersten Abschnitt (S. 1/102) die Berechnung der Formänderungen statisch bestimmter ebener Fachwerke und vollwandiger Träger. Der zweite Abschnitt behandelt die statisch unbestimmten Tragwerke. Der Verfasser führt zahlreiche Beispiele von einfach, zweifach und dreifach statisch unbestimmten Systemen vollständig durch (S. 102/196) und stellt dann die allgemeinen Berechnungsverfahren auf, die auch wieder vielfach angewendet werden. Diese Methode, nicht mit den allgemeinen Elastizitätsgleichungen anzufangen, mag ja pädagogisch mitunter zweckmäßig sein. Das Buch wird ebenso wie der erste Band dem Anfänger gute Dienste leisten.

Ratzersdorfer. 152

OTTO **HAUPT,** o. Professor der Mathematik an der Universität Erlangen. Einführung in die Algebra. I. Bd. XV + 367 S. Preis br. 24 M, geb. 26 M. — II. Bd. Mit einem Anhang von W. Krull. 1 Figur. XV + 369—663 S. Preis br. 20 M, geb. 21.50 M. — Bd. V von: Mathematik und ihre Anwendungen in Monographien und Lehrbüchern herausgegeben von E. Hilb, o. Professor an der Universität Würzburg. Verlag Akademische Verlagsges., Leipzig 1929.

Die Darstellung ist von den Tendenzen beeinflußt, die unter der Einwirkung der Steinitzschen grundlegenden Arbeit über die Theorie der Körper seit 1910 die wissenschaftliche Forschung tiefgreifend beeinflußt haben. Die Darstellung ist infolgedessen etwas abstrakt geraten und läßt vieles gerade für die Leser dieser Zeitschrift Interessante beiseite. Von praktischer Algebra wird man kaum etwas finden. Um so mehr wird der Leser auf seine Rechnung kommen, der sich unter der Arbeit der Praxis die Freude am Spiel der Phantasie mit Begriffen und Formeln nicht hat verkümmern lassen. Dieser findet in Haupt einen zuverlässigen sorgfältigen Führer, der um die leichte Faßlichkeit der Darstellung und eine klug abgewogene Einführung in die modernen Gedankengänge stets erfolgreich bemüht ist.

Bieberbach.

Prof. ARTHUR B. **COBLE,** Professor of Mathematics in the University of Illonois. Algebraic Geometry and Theta Functions. American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. X. Publ. by The American Mathematical Society, New York 1929, 501 West 116th Street. VII + 282 p.

Zusammenfassende Darstellung der Ergebnisse von Schottky, Wirtinger und dem Verfasser, die durch neue Stücke bereichert ist.

Bieberbach.

D. **JACKSON,** The theory of approximation. Am. Math. Soc. Coll Publ., Vol. XI. Am. Math. Soc., New York 1930. 178 S.

Die Darlegungen gelten dem vom Verfasser selbst so stark geförderten Problem der Approximation stetiger Funktionen durch Polynome gegebenen Grades, trigonometrische Summen gegebenen Ordnung. Bieberbach.

SOLOMON **LEFSCHETZ,** Professor at Princeton University. Topology. American Mathematical Society. Colloquium Publications, Volume XII. Verlag American Mathematical Society, New York 1930. XI + 410 S. Preis 4.50 S.

Zusammenfassende Darstellung des gegenwärtigen Standes der Topologie.

Bieberbach. 147

RICHARD **DEDEKIND,** Gesammelte mathematische Werke. Herausgegeben von Robert Fricke in Braunschweig, Emmy Noether in Göttingen, Oeystein Ore in New Haven. Erster Band. Mit einem Bildnis Dedekinds. Verlag Vieweg & Sohn, Braunschweig 1930. 397 S. Preis geh. 30 M., geb. 32.50 M.

Der mit dem Bildnis von Dedekind geschmückte erste Band bringt die Abhandlungen von der Göttinger Dissertation (1852) an bis zum Jahre 1882. Von den neunzehn hier abgedruckten Arbeiten dürften die folgenden den angewandten Mathematiker interessieren:

IV. Bemerkungen zu einer Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung (1855).

IX. Über die Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung (1860).

X. Über die Bestimmung der Präzision einer Beobachtungsmethode nach der Methode der kleinsten Quadrate (1860).

Es sind zwei weitere Bände geplant, welche u. a. den Rest der Abhandlungen und die berühmten Schriften „Stetigkeit und irrationale Zahlen" sowie „Was sind und was sollen die Zahlen" enthalten werden.

Königsberg i. Pr. G. Szegö.

E. **PASCAL,** o. Professor an der Kgl. Universität zu Neapel. Repertorium der höheren Analysis. Bd. I, herausgegeben von E. Salkowski, Professor an der Techn. Hochschule Berlin. Zweite Auflage. Dritter Teilband. Verlag B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1929. XII + 1598 S. Preis 22 M.

Es liegt hier der Abschluß der völligen Neubearbeitung des viel benutzten Repertoriums vor. Für den angewandten Mathematiker besitzen insbesondere die folgenden Artikel ein Interesse:

Kap. XXI (G. Hoheisel): Neuere Entwicklungen zur Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Kap. XXII (W. Sternberg): Die Theorie der Randwertaufgaben im Gebiete der partiellen Differentialgleichungen.

Kap. XXIII (A. Walther): Differenzenrechnung.

Kap. XXIV (H. Hahn, L. Lichtenstein und J. Lense): Die Theorie der Integralgleichungen und Funktionen unendlichvieler Variabeln und ihre Anwendung auf die Randwertaufgaben bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen.

Kap. XXV (A. Plessner): Trigonometrische Reihen.

Kap. XXVI (E. Hilb): Kugelfunktionen, Besselsche und verwandte Funktionen.

Königsberg i. Pr. G. Szegö. 154

KEIICHI **HAYASHI,** Professor an der Kaiserlichen Kyushu-Universität, Japan. Tafeln der Besselschen, Theta-, Kugel- und anderer Funktionen. Mit 14 Textabb. Verlag Springer, Berlin 1930. V + 125 S. Preis 24 M, geb. 26 M.

KEIICHI **HAYASHI,** Professor an der Kaiserlichen Kyushu-Universität, Japan, Fünfstellige Funktionentafeln. Mit 17 Abb. Verlag Springer, Berlin 1930. VIII + 176 S. Preis 28 M, geb. 30 M.

Das erstgenannte Werk bildet eine bedeutende und sehr begrüßenswerte Erweiterung des vorhandenen Materials an Zahlenwerten. Der Verfasser, der sich schon durch die Berechnung und Herausgabe anderer Funktionentafeln bekannt gemacht hat, legt jetzt die Ergebnisse sehr umfangreicher Berechnungen, hauptsächlich von Besselschen Funktionen, vor. So sind hier erstmalig vielstellige Werte (nach Bedarf bis zu 100 Stellen) der Zylinderfunktionen höherer Ordnung (nach Bedarf bis zu $n = 135$) berechnet worden. Auch enthält das Buch viele andere für das praktische Rechnen nützliche Zahlen, so die Potenzen von π, die reziproken Quadrate der Fakultäten u. dgl. mehr. Auch diejenigen Tafeln, die anderen Werken entnommen sind, werden in neuartiger, bestimmten Verwendungszwecken besser angepaßter Form gegeben. Ein sorgfältig bearbeiteter Anhang enthält Formeln über die behandelten Funktionen und über zweckmäßige Art der Interpolation. Die Druckanordnung ist durchaus zu loben, wenn auch manchmal, wohl um den Preis des Buches nicht allzu hoch werden zu lassen, die Typen recht klein ausgefallen sind.

Die an zweiter Stelle genannte Tafelsammlung enthält eine handliche Zusammenstellung der wichtigsten Zahlenwerte aus dem vorstehend besprochenen und dem älteren Werk des Verfassers [1]). Zweifellos wird auch dieses Büchlein die große Verbreitung finden, die ihm seinem Wert nach zukommt. Mises. 158

Siebenstellige Werte der Trigonometrischen Funktionen von Tausendstel zu Tausendstel des Grades. Bearbeitet im Auftrage der Optischen Anstalt C. P. Goerz Akt.-Ges. von Prof. Dr. J. **PETERS,** Observator am Kgl. Astronomischen Rechen-Institut zu Berlin. Verlag der Optischen Anstalt C. P. Goerz Akt.-Ges. In Kommission bei B. G. Teubner, Leipzig. Preis kart. 18 M, geb. 21 M.

Die ständig zunehmende Benutzung von Rechenmaschinen führt dahin, daß allmählich das logarithmische Rechnen mehr und mehr zurücktritt. Es entsteht dadurch das Bedürfnis, die natürlichen Werte der elementaren Funktionen in passender Form tabuliert zu besitzen. Der Verfasser, der siebenstellige Werte der goniometrischen Funktionen für Dezimalteilung des Grades berechnet hat, ist hierbei wohl in erster Linie von den Bedürfnissen der Astronomie und der Optik aus-

[1]) K. Hayashi, Sieben- und mehrstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen. Diese Zeitschr. 7, 1927 S. 83—84.

gegangen. In der Technik pflegt man ja sonst noch meist mit Minuten- und Sekunden-Tafeln zu arbeiten. Die Anordnung des Druckes, die Zusammenfassung in einen handlichen Band muß als gut gelungen bezeichnet werden. Für die Zuverlässigkeit bürgt der durch vielfache ältere Arbeiten bekannte Name des Verfassers.

Mises. 158

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Herausgegeben von der Preußischen Akademie der Wissenschaften. Schriftleiter Georg Feigl. Bd. 53, Jahrg. 1927. Sonderheft III. Analysis. Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1930. S. 179 bis 538. Preis 40,50 M.

Das Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, das seit 1868 regelmäßig erscheint, ist neuerdings von der Preußischen Akademie der Wissenschaften übernommen worden, die Herrn Feigl mit der Schriftleitung betraut hat. Den Inhalt des Jahrbuches bilden kurze sachliche Berichte über den Inhalt der in Zeitschriften aller Länder verstreuten mathematischen Abhandlungen. Die Referate werden von Spezialisten der einzelnen Gebiete bearbeitet und erscheinen in systematischer Ordnung nach Abschluß der Bearbeitung einer gesamten Jahresproduktion. Dies hat zur Folge, daß jetzt erst der Jahrgang 1927 vorgelegt werden kann. Eine Neuerung besteht darin, daß Sonderhefte, die Teile des Gesamtgebiets der Mathematik umfassen, ausgegeben werden. Das Sonderheft III, das der Analysis gewidmet ist, enthält auch, in Kapitel XVI, die Arbeiten aus dem Gebiete der Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihrer Anwendungen. Eine flüchtige Durchsicht der Referate läßt wohl vielerlei Mängel erkennen, doch ist zu hoffen, daß die neue Schriftleitung, wenn sie sich erst einmal mit dem großen Stab ihrer Mitarbeiter eingespielt hat, der in der Natur der Sache begründeten, nicht geringen Schwierigkeiten der Aufgabe allmählich Herr werden wird.

Mises. 158

Dr.-Ing. JOSEF **EINWACHTER,** Wehre und Sohlenabstürze. Berechnung der Unterwasserspiegellage und Kolktiefe bei den verschiedenen Abflußarten. Untersuchungen aus dem Flußbaulaboratorium der Technischen Hochschule zu Karlsruhe. Mit 35 Abb. im Text, 22 Abb. im Anhang und 10 Zahlentafeln. Verlag R. Oldenbourg, München und Berlin 1930. VII + 58 S. Preis geh. 7 M.

Im Karlsruher Flußbaulaboratorium sind Versuchsreihen ausgeführt worden, die eine gewisse Unstabilität im Wasserabfluß hinter Wehren aufklären sollten. Sicherlich wird man ein solches Unternehmen für verdienstvoll halten. Die theoretischen Ansätze jedoch, mit denen an die Untersuchung herangegangen wurde — und ohne solche Ansätze kann keine experimentelle Forschung nutzbringend sein —, sind recht primitiv. Man wird daher die Versuchsergebnisse vielleicht späterhin als Material verwenden können; eine wesentliche Aufklärung der untersuchten Vorgänge wird man in der vorliegenden Schrift kaum finden.

Mises. 158

Dr.-Ing. BRUNO **ECK,** Strömungslehre an Hand von Strömungsbildern. Darstellung der wichtigsten Strömungsvorgänge aus der Flugtechnik und dem Maschinenbau mit 60 Strömungsaufnahmen. Selbstverlag Köln 1931. 18 S.

Das Bilderbuch, das 60 wohlgelungene Aufnahmen von Strömungsvorgängen in der aus der Göttinger Veröffentlichungen bekannten Weise wiedergibt, wird für Unterrichts- und sonstige Vorführungszwecke sehr nützlich sein. Der beigegebene Text besteht im wesentlichen aus Sonderdrucken einiger früherer Arbeiten des Verfassers.

Mises. 158

Dr. phil. RUDOLF **BEYER,** Gewerbestudienrat an der Ingenieurschule Zwickau in Sa. Technische Kinematik. Zum Gebrauche bei Vorlesungen, in Konstruktionssälen und beim Selbststudium. Mit einem Bildnis von Franz Reuleaux und 642 Figuren im Text. Verlag Joh. Ambr. Barth, Leipzig 1931. XII + 504 S. Preis 53 M.

Der Verfasser hat sich zur Aufgabe gestellt, drei verwandte, aber bisher in der Literatur nebeneinanderlaufende Lehrgebiete zu vereinen: die systematische Zwanglaufmechanik von Reuleaux, die geometrische Kinematik, wie sie unter andern von Burmester betrieben wurde, und die sog. graphische Dynamik, die ihren Namen und ihre erste Fassung durch Ferdinand Wittenbauer erhalten hat.

Der erste, der Reuleauxschen Theorie gewidmete Teil des Buches gibt eine modernisierte Darstellung der Reuleauxschen Grundideen einschließlich der kinematischen Formelsprache und schließt daran die üblichen Konstruktionen für Geschwindigkeits- und Beschleunigungsverläufe. Dabei wird auch ausführlicher als sonst auf räumliche Getriebe Rücksicht genommen.

Der zweite Abschnitt enthält zunächst die aus dem Burmesterschen Werk bekannten Konstruktionen der kinematischen ebenen Geometrie, denen ein ausführliches Kapitel über die sogen. Getriebesynthese hinzugefügt ist. Auch hier wird auf die Theorie der räumlichen Bewegung eingegangen, und es werden die modernen Abbildungsmethoden der dreidimensionalen Kinematik besprochen.

In dem letzten und verhältnismäßig sehr kurzen Abschnitt, der der Wittenbauerschen Dynamik gewidmet ist, werden die bekannten kinetostatischen Untersuchungen an den wichtigsten Getrieben vorgeführt. Es ist notwendig, hier hervorzuheben, daß wirklich kinetische Probleme auf diesem Wege nicht gelöst werden und nicht gelöst werden können, denn sie hängen wesentlich von der Integration von Differentialgleichungen ab.

Im ganzen wird man in dem vorliegenden Werk eine verdienstvolle und für den Studierenden, gelegentlich auch für den Praktiker nützliche Zusammenfassung erblicken dürfen.

Mises.

F. **WITTENBAUER,** Aufgaben aus der Technischen Mechanik. II. Bd. Elastizitäts- und Festigkeitslehre. 566 Aufgaben nebst Lösungen und einer Formelsammlung. Vierte, vollständig umgearbeitete Auflage, herausgegeben von Dr.-Ing. Theodor Pöschl, o. Professor an der Technischen Hochschule in Karlsruhe. Mit 498 Textabb. Verlag Springer, Berlin 1931. VIII + 318 S. Preis 12.60 M, geb. 14 M.

Der Herausgeber bemüht sich mit Erfolg, allmählich aus der Wittenbauerschen Aufgabensammlung, die ihrer ganzen Anlage nach veraltet war, ein für den heutigen Unterricht brauchbares Werk zu gestalten. Gegenüber der letzten Auflage sind wieder mannigfache Änderungen vorgenommen und neue Aufgaben hinzugefügt worden. Freilich hat man den Eindruck, daß ein Gebiet wie das der heutigen Elastizitäts- und Festigkeitslehre sich nicht restlos durch Aufgabenstellungen von solch kleinem Umfang erschöpfen läßt. Die ganze Idee einer Aufgabensammlung, die schließlich die Form eines Frage- und Antwortspieles besitzt, eignet sich doch nur für die elementarsten Gebiete oder die ersten Anfangsgründe einer Wissenschaft. Auf einer etwas höheren Stufe wird gerade das, was dem Lernenden Schwierigkeiten bereitet, und

was ihm beizubringen die wichtigste Aufgabe des Unterrichts ist, das Verständnis für die tieferen Zusammenhänge der einzelnen Lehren, in einer Beispielsammlung nicht erfaßt. Immerhin mag man dem vorliegenden Buch einräumen, daß es im Rahmen des Möglichen Gutes leistet. Mises.

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

Dr. JOHANNES **TROPFKE,** Oberstudiendirektor an der Kirschner-Schule zu Berlin. Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung mit besonderer Berücksichtigung der Fachwörter. Erster Band: Rechnen. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1930. VII + 222 S. Preis 12 M.

H. B. **LÜBSEN,** Ausführliches Lehrbuch der ebenen Geometrie zum Schul- und Selbstunterricht mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens. 33. Auflage, völlig neu bearbeitet von Prof. Dr. A. Donadt. Mit 258 Figuren im Text. Verlag Friedrich Brandstetter, Leipzig 1930. 286 S. Preis geh. 6 M, geb. 6,50 M.

H. B. **LÜBSEN,** Ausführliches Lehrbuch der körperlichen Geometrie und der synthetischen Geometrie der Kegelschnitte; zum Schul- und Selbstunterricht mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens. 33. Auflage, völlig neu bearbeitet von Prof. Dr. A. Donadt. Mit 172 Figuren im Text. Verlag Friedrich Brandstetter, Leipzig 1930. 205 S. Preis geh. 5 M, geb. 5,50 M.

Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandter Gebiete. (Aachen 1929.) Herausgegeben von A. **GILLES,** L. **HOPF,** Th. v. **KARMAN.** Mit 137 Abb. i. Text. Verlag Springer, Berlin 1930. 221 S. Preis 18,50 M, geb. 20 M.

ARTHUR **HAAS,** Dr. phil., Professor für Physik an der Universität Wien. Einführung in die theoretische Physik. Mit besonderer Berücksichtigung ihrer modernen Probleme. Zweiter Band. Mit 85 Abbildungen im Text und auf sechs Tafeln. Fünfte und sechste, abermals völlig umgearbeitete und wesentlich vermehrte Auflage. Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1930. VIII + 448 S. Preis 18,50 M.

R. **COURANT,** ord. Professor der Mathematik an der Universität Göttingen, und

D. **HILBERT,** ord. Professor der Mathematik an der Universität Göttingen.

Methoden der mathematischen Physik. Erster Bd. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 26 Abb. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Bd. XII. Verlag Springer, Berlin 1931. XIV + 469 S. Preis 29,20 M, geb. 30,80 M.

BRUNO **KLETLER,** Magische Zahlenquadrate. Mechanische, gemeinverständliche Lösungen für alle Arten von Quadraten. In Kommission bei Braumüller, Wien und Leipzig. VII + 55 S. Preis brosch. 1,80 M.

Dr. KARL **DOEHLEMANN,** weil. Professor an der Technischen Hochschule München. Geometrische Transformationen. Zweite, umgearbeitete Auflage, herausgegeben von Dr. Wilhelm Olbrich, Professor an der Hochschule für Bodenkultur in Wien. Mit 89 Fig. u. 4 Abb. i. Text. Göschens Lehrbücherei. 1. Gruppe. Bd. 15. Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1930. 254 S. Preis 14,50 M.

ERNST **STEINITZ,** Algebraische Theorie der Körper. Neu herausgegeben, mit Erläuterungen und einem Anhang: Abriß der Galoisschen Theorie versehen von Reinhold Baer und Helmut Hasse. Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1930. 150 S. Preis 9 M.

THEODOR **PÖSCHL,** Mechanik der nichtstarren Körper. Mit 61 Abbildungen im Text und auf zwei Tafeln. Verlag Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1929. Preis 3,20 M. — Sonderdruck aus Müller-Pouillets Lehrbuch der Physik I, 2, 11. Aufl. S. 849 bis 909.

Dr. KONRAD **KNOPP,** ord. Prof. an der Universität Tübingen. Funktionentheorie. Erster Teil: Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen. Mit 8 Figuren. Vierte, verbesserte Auflage. Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1930. Sammlg. Göschen Nr. 668. 140 S. Preis 1,80 M.

O. TH. **BÜRKLEN,** Mathematische Formelsammlung. Vollständig umgearbeitete Neuausgabe von Dr. F. Ringleb, Assistent an der Mathematischen Anstalt und am Mathematischen Seminar der Universität Jena. Mit 38 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1931. Sammlg. Göschen Nr. 51. 255 S. Preis 1,80 M.

Handbuch der Vermessungskunde von Weil. Dr. phil. h. c. W. **JORDAN,** Prof. an der Technischen Hochschule zu Hannover, fortgesetzt von Weil. Dr. C. **REINHERTZ,** Prof. an der Technischen Hochschule zu Hannover. Zweiter Band, Erster Halbband: Feld- und Landmessung. Mit zahlreichen Figuren und Abbildungen. Neunte, erweiterte Auflage, bearbeitet von Dr. O. Eggert, Prof. an der Technischen Hochschule zu Berlin. Verlag Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart 1931. XIV + 572 S. Preis brosch. 26 M, geb. 29,50 M.

Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik. Herausgeg. von Prof. Dr. F. **AUERBACH** und Prof. Dr. W. **HORT.** Bd. IV, 2. Hälfte. Technische Physik d. festen Körper. Mit 533 Abb. im Text. Verlag Joh. Ambr. Barth, Leipzig 1931. XIV + 614 S. Preis 98 M.

Dr. PAUL **GAST,** o. Prof. an der Technischen Hochschule Hannover. Vorlesungen über Photogrammetrie. Mit 182 Figuren. Verlag Joh. Ambr. Barth, Leipzig 1930. VIII + 328 S. 38,50 M.

T.-A. **RAMOS,** Professeur à l'Ecole Polytechnique de Sao-Paulo. Membre de l'Academia Brasileira de Sciencias. Leçons sur le Calcul Vectoriel. Librairie Scientifique Albert Blanchard, Paris 1930. 119 S.

D. **LEIB,** Professeur de Mathématiques au Collège Connecticut de l'Université de Yale. Applications du Calcul différentiel et intégral. Traduit de l'anglais et adapté par A. Sallin. Préface de L. Potin de la Revue générale des sciences. Librairie scientifique Albert Blanchard, Paris 1930.

W. **WIEN** und F. **HARMS,** Handbuch der Experimentalphysik, Band 4, Hydro- und Aerodynamik. 1. Teil: Strömungslehre und allgemeine Versuchstechnik. Herausgegeben von Ludwig Schiller, Leipzig. Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H., Leipzig 1931. 730 S. Preis brosch. 66 M, geb. 68 M.

Professor Dr.-Ing., Dr. Techn. h. c. VIKTOR **KAPLAN,** Brünn, u. Professor Dr. Techn. ALFRED **LECHNER,** Wien, Theorie und Bau von Turbinen-Schnelläufern. Verlag R. Oldenbourg, München und Berlin 1931. VIII + 301 S. Preis geb. 18 M.

Dr.-Ing. OTTO **FÖPPL,** a. o. Professor an der Technisch. Hochschule und Vorstand des Wöhler-Instituts, Braunschweig. Grundzüge der Technischen Schwingungslehre. 2., verbesserte und ergänzte Auflage. Mit 140 Abbildungen im Text. Springer, Berlin 1931. VI + 212 S. Preis 8,50 M, geb. 9,50 M.

o. Professor a. d. Technischen Hochschule in Wien Dr. KARL **WOLF,** Lehrbuch der Technischen Mechanik starrer Systeme. Verlag Julius Springer, Wien 1931. 359 S. Preis geb. 19 M.

JAMES B. **SCARBOROUGH,** Ph. D., Associate Professor of Mathematics at the U. S. Naval Academy. Numeral Mathematical Analysis. Baltimore: The Johns Hopkins Press, London: Humphrey Milford Oxford University Press 1930. 416 S. Preis 5,50 Dollar.

Prof. Dr. PAUL **BACHMANN,** Grundlehren der Neueren Zahlentheorie. Mit einem Gedächtnisworte herausgegeben von Prof. Dr. Robert Haussner. Mit 10 Figuren. Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin W 10 und Leipzig 1931. XVI + 252 S. Preis 9,50 M.

NACHRICHTEN

Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik.

Ortsgruppe Berlin.

Am 20. Februar sprach Hr. Prof. Dr. A. Kopff, Berlin, über Probleme der Stellardynamik.

Ortsgruppe Göttingen.

Am 4. Februar 1931 sprachen Hr. Prof. Dr. Prandtl, Göttingen, über Reibungsströmung im Rohr und an der Platte, und Hr. Dr. Flügge über Knickung von Zylinderschalen.

Prager Mitglieder.

Am 5. Februar sprach Hr. Prof. Dr. Funk über Eigenwerte.

Am 26. Februar fand ein Vortrag von Hrn. Prof. Dr. Ernst Melan, Wien, über die Sicherheit einfach statisch unbestimmter Systeme statt.

All-Ukrainisches Institut für angewandte Mathematik.

Die all-ukrainische Akademie der Wissenschaften in Kiew hat die Errichtung eines großen Instituts für angewandte Mathematik beschlossen. Es soll folgende Abteilungen umfassen: 1. eine Abteilung für allgemeine Methoden der angewandten mathematischen Forschung, einschließlich der mathematischen Statistik, 2. eine Abteilung für mathematische Physik, 3. für mathematische Biologie, 4. für mathematische Soziologie, 5. für mathematische Technologie.

Als Hilfseinrichtungen des Instituts sind eine Büchersammlung, ein geschichtlich-mathematisches Museum sowie eine Sammlung mathematischer Modelle vorgesehen. Mit dem Institut soll verbunden werden die Schriftleitung einer Zeitschrift für angewandte Mathematik, die Herausgabe von mathematischen Tabellen, Nomogrammen und anderen Rechenhilfsmitteln sowie von Büchern und Schriften, die den Fragen der angewandten Mathematik gewidmet sind. Auch eine Werstätte zur Anfertigung von Modellen, Rechenvorrichtungen und Rechenmaschinen, endlich ein Institut, das Aufträge zur Erledigung umfangreicher Rechenarbeiten übernimmt, sind geplant.

Forschung tut not.

Unter dieser Überschrift läßt der Verein Deutscher Ingenieure eine Druckschrift erscheinen, in der auf die dringende Notwendigkeit, wissenschaftliche Forschung zu unterstützen, nachdrücklichst hingewiesen wird. Es ist zu wünschen, daß die anregend geschriebene Schrift bei den in Betracht kommenden Stellen die Beachtung findet, die sie verdient. Interessenten können Exemplare der Broschüre durch den VDI-Verlag beziehen.

Persönliches.

Am 31. Dezember 1930 verstarb in Stuttgart der Geh. Regierungsrat und o. Prof. an der Technischen Hochschule Charlottenburg Dr. phil. Eugen Meyer. Wir werden auf die Verdienste und die Bedeutung dieses hervorragenden Gelehrten demnächst zurückkommen.

In der Mechanischen Abteilung der Technischen Hochschule Dresden wurde Hrn. Dr.-Ing. Adolf Busemann, bisher in Göttingen, die Lehrberechtigung für Strömungslehre und Thermodynamik erteilt.

An der Technischen Hochschule Aachen ist dem a. o. Prof. Franz Krauss ein Lehrauftrag für Mathematik und dem Privatdozenten Dr. Heinrich Graf von der Technischen Hochschule in Karlsruhe ein Lehrauftrag für darstellende Geometrie und angewandte Mathematik erteilt worden.

Hr. Prof. Dr. G. Doetsch, bisher an der Technischen Hochschule in Stuttgart, ist als o. Prof. der Mathematik an die Universität Freiburg i. B. berufen worden.

An die Technische Hochschule Charlottenburg ist Hr. Dipl.-Ing. Dr. Kucharski als o. Prof. der Mechanik in der Fakultät für Maschinenwirtschaft (Nachfolge von Eugen Meyer) berufen worden.

Für die Schriftleitung verantwortlich: Professor Dr. von Mises, Berlin NW 87, Siegmundshof 9; für den Anzeigenteil: Peter Valerius, Berlin NW 40.
Druck von A. W. Zickfeldt, Osterwieck am Harz.